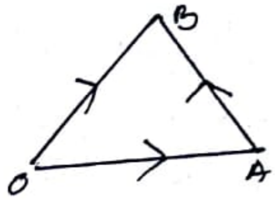
வெக்டர்கள் (குறிப்புகள்)

1) முக்கோண கூட்டல் விதி: இரு வெக்டர்கள் அவற்றின் எண்ணளவுகளாலும் திசையாலும் ஒரு முக்கோணத்தின் வரிசையாக எடுக்கப்பட்ட இரண்டு பக்கங்களின் மூலமாக குறிப்பிட்டால் அவற்றின் கூடுதல் அம்முக்கோணத்தின் எதிர் வரிசையில் எடுக்கப்பட்ட மூன்றாவது பக்கத்தினால் குறிக்கலாம்.

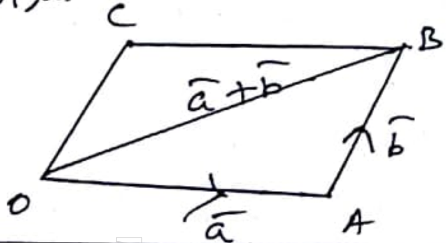


$\overline{OA}+\overline{AB}=\overline{OB}$

$\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}$.

(அ) $\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{BO}=\overline{OO}$
$=0$.

2) இணைகர விதி: OABC என்ற இணைகரத்தில் $\overline{OA}$ மற்றும் $\overline{OB}$ அடுத்தடுத்த பக்கங்களை குறித்தால் அதன் மூலைவிட்டமான $\overline{OC}$, இவற்றின் கூடுதலை குறிக்கும்.



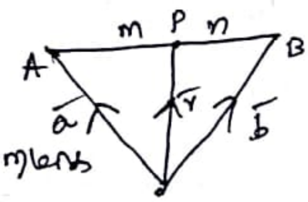
3) கூட்டலின் பல கோண விதி: $\overline{OA}, \overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ மற்றும் $\overline{DE}$ ஆகியவை ஏதேனும் 5 வெக்டர்கள் என்க. ஒவ்வொரு வெக்டரும் முந்தைய வெக்டரின் முடிவுப்புள்ளியிலிருந்து ஆரம்பிக்கும்

$\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}=\overline{OE}$

4) O வை ஆதி என்க மேலும் A மற்றும் B ஐ ஏதேனும் இரு புள்ளிகள் என்க இங்கு $\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}$. $\overline{OA}, \overline{OB}$ முறையே A, B யின் நிலை வெக்டர்களாகும்.

5) பிரிவு சூத்திரம்: AB என்ற கோட்டை P என்ற புள்ளி m:n என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாக பிரித்தால்

$$\overline{OP}=\frac{m\overline{OB}+n\overline{OA}}{m+n}=\frac{m\bar b+n\bar a}{m+n}$$



P என்பது m:n விகிதத்தில் வெளிப்புறமாக பிரித்தால் $\overline{OP}=\frac{m\overline{OB}-n\overline{OA}}{m-n}$.

P என்பது மையப்புள்ளியானால் m:n = 1:1 என்க

$$\overline{OP}=\frac{\bar a+\bar b}{2}$$

6) ஒரு முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும்.

நடுக்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி மையக்கோட்டுச்சந்தி எனப்படும்.

$$\overline{OG} = \frac{\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}}{3}.$$

- நடுக்கோட்டுச் சந்தி (G) மையக்கோட்டுச் சந்தி நடுக்கோட்டினை உட்புறமாக 2 : 1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும்.

7) $\hat{i}, \hat{j}$ முறையே x மற்றும் y அச்சின் மிகை திசையில் அமைந்த அலகு வெக்டர்கள். $\bar{r}$ என்பது தளத்தில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு வெக்டர் எனில் $\bar{r} = x\hat{i}+y\hat{j}$ ஆகும்.

8) முப்பரிமாணத்தில் $\bar{r} = x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$.

$$|\bar{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

α, β, γ என்பன OP முறையே OX, OY, OZ உடன் ஏற்படுத்தும் கோணங்கள் எனில் $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ என்பன திசைக்கொசைன்கள் ஆகும். மேலும் $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1$.

திசைக்கொசைன்கள்: $\cos\alpha = \frac{x}{|\bar{r}|}$, $\cos\beta = \frac{y}{|\bar{r}|}$, $\cos\gamma = \frac{z}{|\bar{r}|}$.

9) $\bar{a}$ ன் திசையிலமைந்த ஓரலகு வெக்டர் $\hat{a} = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$.

10) திசையிலிப் பெருக்கம்: $\bar{a}$ மற்றும் $\bar{b}$ என்ற இரு வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ எனில் $\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta$. $0 \le \theta \le \pi$

11) $\bar{a}$ ன் மீது $\bar{b}$ ன் வீழல் $= \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|}$.

12) $\bar{a}\cdot\bar{b} = 0$ எனில் $\bar{a}\perp\bar{b}$. (அ) $\bar{a}\perp\bar{b}$ எனில் $\bar{a}\cdot\bar{b} = 0$

13) $\bar{a}, \bar{b}$ இணை எனில் $\bar{a} = \lambda\bar{b}$. $\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{a}$.

14) $\cos\theta = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$

15) $\bar{a} = a_1\hat{i}+b_1\hat{j}+c_1\hat{k}$ $\bar{b} = a_2\hat{i}+b_2\hat{j}+c_2\hat{k}$ எனில்

$\bar{a}\cdot\bar{b} = a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$

ஒத்த உறுப்புகளின் கெழுக்களை பெருக்க வேண்டும்.

16) $|\bar{a}+\bar{b}| \le |\bar{a}|+|\bar{b}|$

$(\bar{a}+\bar{b})^2 = |\bar{a}+\bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2+2\bar{a}\cdot\bar{b}$

$(\bar{a}-\bar{b})^2 = |\bar{a}-\bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2-2\bar{a}\cdot\bar{b}$

$$(\bar a+\bar b)\cdot(\bar a-\bar b) = |\bar a|^2-|\bar b|^2$$

17) வெக்டர் பெருக்கம்: இரு பூச்சியமற்ற வெக்டர்கள் $\bar a, \bar b$ ன் வெக்டர் பெருக்கம் $\bar a\times\bar b = |\bar a||\bar b|\sin\theta\,\hat n$. $0\le\theta\le\pi$

$\bar a, \bar b, \hat n$ வலக்கை அமைப்புடையது

மேலும் $\hat n$ என்பது $\bar a$க்கும் $\bar b$க்கும் செங்குத்தான ஓரலகு வெக்டர்

18) $|\bar a\times\bar b| = |\bar a||\bar b|\sin\theta$.

$$\sin\theta = \frac{|\bar a\times\bar b|}{|\bar a||\bar b|}.$$

19) $\hat n = \pm\dfrac{\bar a\times\bar b}{|\bar a\times\bar b|}$, $\lambda\hat n = \pm\lambda\dfrac{(\bar a\times\bar b)}{|\bar a\times\bar b|}$

20). $\bar a = a_1\hat i + a_2\hat j + a_3\hat k$

$\bar b = b_1\hat i + b_2\hat j + b_3\hat k$

$$\bar a\times\bar b = \begin{vmatrix} \hat i & \hat j & \hat k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

21) $\bar a\times\bar b$ பரிமாற்று விதியை நிறைவு செய்யாது

மேலும் $\bar a\times\bar b = -\bar b\times\bar a$.

22) $\bar a, \bar b$களை அடுத்தடுத்த பக்கங்களாகக் கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்பு

$A = |\bar a\times\bar b|$

23) $\bar a, \bar b$ அடுத்தடுத்த பக்கங்களாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு $= \frac{1}{2}|\bar a\times\bar b|$.

24) $|\bar a\times\bar b|^2+(\bar a\cdot\bar b)^2 = |\bar a|^2|\bar b|^2$

25) $\bar a, \bar b$ என்பன $\bar c = s\bar a + t\bar b$ எனில்

$\bar a, \bar b, \bar c$ ஒருதள வெக்டர்கள்.

T. G. Venkatesan
9444209677.

வெக்டர் இயற்கணிதம். பயிற்சி - 1.

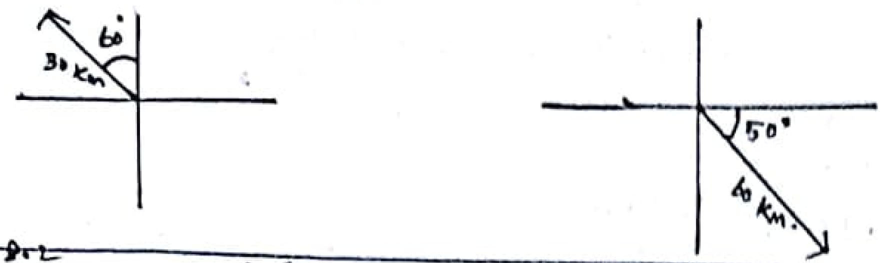
எ.கா 1: வரைபடத்தின் வாயிலாக கீழ்க்காணும் இடப்பெயர்ச்சியை குறிக்க.

1) 30 கி.மீ வடக்கிலிருந்து மேற்காக.

2) கிழக்கிலிருந்து தெற்காக.

வழிமுறை: 1) வடக்கிலிருந்து மேற்காக இரண்டாவது காற்பகுதியில் அமையும்.

2) கிழக்கிலிருந்து தெற்காக நான்காவது காற்பகுதியில் அமையும்.



எ.கா 2: ஒரு ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் இரண்டு அடுத்தடுத்த பக்கங்கள் $\bar a, \bar b$ ஆக இருந்தால் பிற பக்கங்களை குறிக்கும் வெக்டர்களை காண்க.

வழிமுறை: எதிரெதிர் பக்கங்கள் சமமாகவும் எதிர் திசையிலும் அமையும். மையம் வழியாக செல்லும் பக்கம் அதன் இணைபக்கத்திற்கு இருமடங்கு. கூட்டல் விதியை பயன்படுத்தி 1 வெக்டர்களைப் பெறுத்தால் மற்றவை வரும்.

$\bar{OA}=\bar a$, $\bar{AB}=\bar b$ — 2

$\therefore \bar{OB}=\bar a+\bar b$

மேலும் $\bar{OC}=2\bar b$

$\bar{OB}+\bar{BC}=2\bar b$

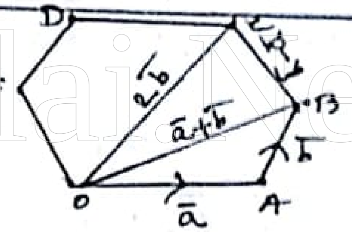
$\bar{BC}=2\bar b-(\bar a+\bar b)$

$=\bar b-\bar a$ — 3

$\bar{OA}=-\bar{CD}=-\bar a$ — 4

$\bar{DE}=-\bar{AB}=-\bar b$ — 5

$\bar{EO}=-\bar{BC}=\bar a-\bar b$ — 6



எ.கா 3: A மற்றும் B என்ற புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் $2\bar a+4\bar b$, $2\bar a-8\bar b$ எனில். A மற்றும் B ஐ இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை 1 : 3 என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகவும், வெளிப்புறமாகவும் பிரிக்கும் புள்ளிகளின் நிலை வெக்டரை காண்க.

வழிமுறை: பிரிவு சூத்திரத்தை பயன்படுத்த:

$$\bar{OP}=\frac{l\bar{OB}+m\bar{OA}}{l+m}, \quad \bar{OP}=\frac{l\bar{OB}-m\bar{OA}}{l-m}$$

l P m
A 1 3 B

$\bar{OA}=2\bar a+4\bar b$ $\bar{OB}=2\bar a-8\bar b$ உட்புறமாக 1 : 3

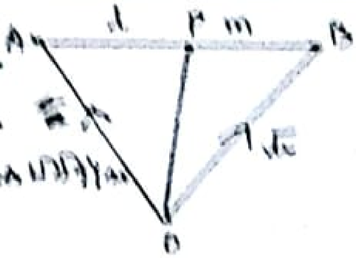
$$\bar{OP}=\frac{1\cdot\bar{OB}+3\cdot\bar{OA}}{1+3}=\frac{(2\bar a-8\bar b)+3(2\bar a+4\bar b)}{4}=\frac{8\bar a+4\bar b}{4}=\frac{4(2\bar a+\bar b)}{4}$$

வெளிப்புறமாக 1 : 3 $\bar{OQ}=\dfrac{(2\bar a-8\bar b)-3(2\bar a+4\bar b)}{1-3}=\dfrac{-4\bar a-20\bar b}{-2}=\dfrac{-2(2\bar a+10\bar b)}{-2}$

பிரிவுச் சூத்திரம் – உட்புறமாகப் பிரிக்கும் புள்ளியின் நிலை வெக்டர்

$\vec a$, $\vec b$ ஐ நிலை வெக்டர்களாகக் கொண்ட புள்ளிகள் A, B என்க. A, B ஐ இணைக்கும் கோட்டை $l : m$ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாக பிரிக்கும் புள்ளி P ன் நிலை வெக்டரைக் காணுதல்

$\vec{OA} = \vec a$, $\vec{OB} = \vec b$ மற்றும் $\vec{OP} = \vec r$ என்க.



AB என்ற கோட்டை P என்ற புள்ளி $l : m$ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கிறது

$$\frac{|\vec{AP}|}{|\vec{PB}|} = \frac{l}{m}$$

$$m|\vec{AP}| = l|\vec{PB}|$$

$$m\vec{AP} = l\vec{PB} \quad \text{ஒரே திசையில் இருப்பதால்}$$

$$m(\vec{OP} - \vec{OA}) = l(\vec{OB} - \vec{OP})$$

$$m\vec{OP} - m\vec{OA} = l\vec{OB} - l\vec{OP}$$

$$\vec{OP}(m+l) = l\vec{OB} + m\vec{OA}$$

$$\vec{OP} = \frac{l\vec{OB} + m\vec{OA}}{l+m}.$$

குறிப்பு: 1. P ஆனது வெளிப்புறமாக $l : m$ என்ற விகிதத்தில் பிரித்தால்

$\frac{|\vec{AP}|}{|\vec{PB}|} = -\frac{l}{m}$ எனக் கொள்க. $\therefore \vec{OP} = \frac{l\vec a - m\vec b}{l-m}.$

2. P என்பது AB யின் மையப்புள்ளி எனில் $l : l = 1:1$ ஆகும்

$$\vec{OP} = \frac{\vec a + \vec b}{2}$$

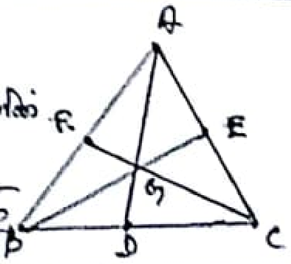
தேற்றம்: ஒரு முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் எனக் காட்டு.

வழிமுறை: நடுக்கோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளியை காண வேண்டும். நடுக்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி 2:1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும். பிரிவு சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி நடுக்கோடுகளை 2:1 விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியை கண்டால் மூன்று நடுக்கோடுகளும் ஒரே புள்ளியை அடைகின்றன. எனவே அது ஒரே புள்ளியாகும்.

$\vec{OA} = \vec a$, $\vec{OB} = \vec b$, $\vec{OC} = \vec c$.

D, E, F முறையே BC, CA, AB பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள்.

$\therefore \vec{OD} = \frac{\vec b + \vec c}{2}$, $\vec{OE} = \frac{\vec c + \vec a}{2}$, $\vec{OF} = \frac{\vec a + \vec b}{2}$



AD என்ற கோட்டை G_1 என்பது 2 : 1 என்ற விகிதத்தில் பிரித்தால்

$$\overline{OG_1} = \frac{2\,\overline{OD}+1\cdot\overline{OA}}{2+1} = \frac{2\left(\frac{\bar b+\bar c}{2}\right)+\bar a}{3} = \frac{\bar a+\bar b+\bar c}{3}.$$

இவ்வாறாக மற்ற இரு நடுக்கோடுகளுக்கும் காண

$$\overline{OG_2} = \overline{OG_3} = \frac{\bar a+\bar b+\bar c}{3}$$ என கிடைக்கும்.

எனவே G_1, G_2, G_3 என்பன ஒரே புள்ளியே ஆகும்.

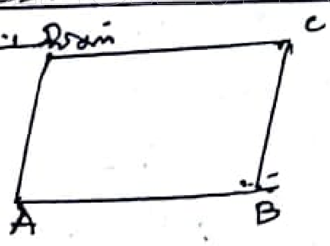
∴ ஒரு முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகள் ஒரே புள்ளி வழிச் செல்லும்.

தேற்றம்: ஒரு நாற்கரம் இணைகரமாக இருக்க தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனை அதன் மூலைவிட்டங்கள் இருசமகூறிடும் என நிறுவுக.

வழிமுறை: ABCD ஒரு இணைகரம் எனக் கொள்க. இணைகரத்தில் எதிர் எதிர் பக்கங்கள் சமம் எனக் கொண்டு மூலைவிட்டங்கள் இருசம கூறிடும் என நிறுவ வேண்டும். மூலைவிட்டங்கள் இருசம கூறிட்டால் மூலைவிட்டங்களின் மையப்புள்ளிகள் சமம் எனக் கொண்டு எதிர் எதிர் பக்கங்கள் சமம் என நிறுவ வேண்டும்.

ABCD என்ற நாற்கரத்தில் AC, BD மூலைவிட்டங்கள்

$\overline{OA}=\bar a,\ \overline{OB}=\bar b,\ \overline{OC}=\bar c,\ \overline{OD}=\bar d$



I ABCD ஒரு இணைகரம் எனில்

$$\overline{AB} = \overline{DC}$$
$$\overline{OB}-\overline{OA} = \overline{OC}-\overline{OD}$$
$$\bar b-\bar a = \bar c-\bar d$$
$$\bar b+\bar d = \bar a+\bar c$$
$$\frac{\bar a+\bar c}{2} = \frac{\bar b+\bar d}{2}$$

∴ AC, BD மூலைவிட்டங்களின் மையப்புள்ளி சமம். எனவே மூலைவிட்டங்கள் இருசமகூறிடும்.

II நாற்கரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் இருசம கூறிட்டால்

$$\frac{\bar a+\bar c}{2} = \frac{\bar b+\bar d}{2}$$
$$\bar a+\bar c = \bar b+\bar d$$
$$\bar c-\bar d = \bar b-\bar a$$
$$\overline{DC} = \overline{AB}$$

∴ எதிர் எதிர் பக்கங்கள் இணை மற்றும் சமம்

எனவே நாற்கரம் ஓர் இணைகரம் ஆகும்.

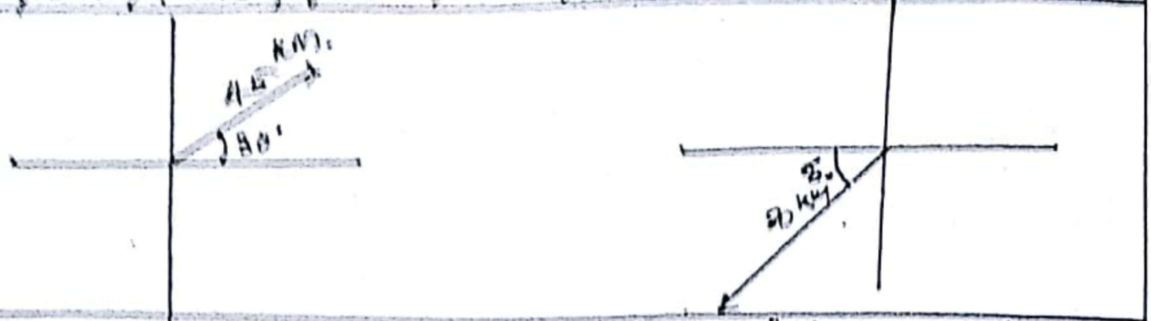
மதிப்பெண் = 4:1

1) கீழ்க்காணும் இடப்பெயர்ச்சிகளை வரைபடம் மூலம் விவரிக்க.

i) 4 கி.மீ வடகிழக்கு திசையில் 30° கோணத்தில்

ii) 5 கி.மீ 60° தென்மேற்கு திசையில்

வழிமுறை: சரியான அளவுகள் கொண்டு வரைதல்

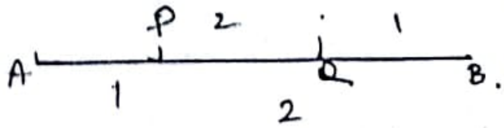


3) A, B என்ற புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்கள் $\vec{a}, \vec{b}$ எனில் AB என்ற கோட்டுத்துண்டை 3 சம பாகங்களாக பிரிக்கும் புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்களை காண்க. அவை $\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$, $\frac{\vec{b}+2\vec{a}}{3}$ எனவும் காட்டு.

வழிமுறை: AB என்ற கோட்டை P என்ற புள்ளி 1 : 2 விகிதத்தில் பிரிப்பதாகவும் Q என்ற புள்ளி 2 : 1 என்ற விகிதத்தில் பிரிப்பதாகவும் கொண்டு P, Q நிலைவெக்டர்களை பிரிவு சூத்திரத்தை பயன்படுத்தி காண்க.

$\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ என்க.

P, AB-யை 1 : 2 விகிதத்தில் பிரித்தால்



$$\vec{OP} = \frac{1\,\vec{b} + 2\vec{a}}{1+2} = \frac{\vec{b}+2\vec{a}}{3}$$

Q, AB-ஐ 2 : 1 என்ற விகிதத்தில் பிரித்தால்

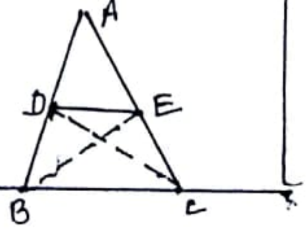
$$\vec{OQ} = \frac{2\cdot\vec{b} + 1\cdot\vec{a}}{2+1} = \frac{2\vec{b}+\vec{a}}{3} \text{ ஆகும்.}$$

4) முக்கோணம் ABC யில் AB மற்றும் AC யின் மையப்புள்ளிகள் முறையே D, E எனில் $\vec{BE} + \vec{DC} = \frac{3}{2}\vec{BC}$ என நிறுவுக.

வழிமுறை: முதலில் $\vec{BE}, \vec{DC}$ காண்க. இதில் D, E என்பன AB, AC ன் மையப்புள்ளிகள் என்பதை பயன்படுத்து அதாவது $\vec{CE} = \frac{1}{2}\vec{CA}$, $\vec{DB} = \frac{1}{2}\vec{AB}$. $\vec{BE}, \vec{DC}$ ஐ கூட்ட விடை கிடைக்கும்.

$$\vec{BE} = \vec{BC} + \vec{CE} = \vec{BC} + \tfrac{1}{2}\vec{CA}$$

$$\vec{DC} = \vec{DB} + \vec{BC} = \tfrac{1}{2}\vec{AB} + \vec{BC}$$



$\vec{AE} + \vec{BF} = \vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{CB} + \frac{1}{2}\,[illegible]$

$= [illegible] + \frac{1}{2}(\vec{CB} + \vec{BA})$

$= [illegible] + \frac{1}{2}\vec{CA}$

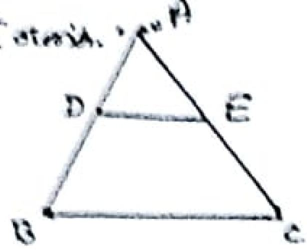
$= [illegible] = \frac{3}{2}\,\vec{BC}$

3) ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களின் மையப் புள்ளிகளை சேர்க்கும் கோடு மூன்றாவது பக்கத்திற்கு இணையாகவும் அதன் நீளத்தில் பாதியாகவும் இருக்கும் என வெக்டர் முறையில் நிறுவுக.

தீர்வு: முக்கோணம் ABC யில் D, E முறையே AB, AC யின் மையப் புள்ளிகள் எனக் கொள்க. OD, OE காண்க. பிறகு DE ஐ BC யின் வாயிலாக எழுதி DE, BC இணை என நிறுவுக.

முக்கோணம் ABC யில் $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ என்க.

D, E முறையே AB, AC யின் மையப்புள்ளிகள்



$\vec{OD} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$, $\vec{OE} = \frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$

$\vec{DE} = \vec{OE} - \vec{OD}$

$= \frac{1}{2}\left[(\vec{a}+\vec{c}) - (\vec{a}+\vec{b})\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\vec{c} - \vec{b}\right] = \frac{1}{2}\left[\vec{OC} - \vec{OB}\right]$

$= \frac{1}{2}\vec{BC}$

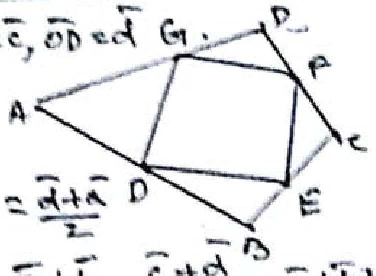
∴ DE, BC இணையானவையும் DE BC ல் பாதியளவாயும் இருக்கும்.

4) ஒரு நாற்கரத்தின் பக்கங்களின் மையப் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடுகள் ஓர் இணைகரத்தை அமைக்கும் என வெக்டர் முறையில் நிறுவுக.

தீர்வு: ஒரு நாற்கரத்தின் பக்கங்களின் மையப் புள்ளிகளை காண்க. இரு மூலைவிட்டங்களின் எதிர் எதிர் பக்கங்களின் மைய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் மையப் புள்ளிகளை காண்க. இரண்டும் ஒன்றே எனக் காட்டுக.

ABCD ஒரு நாற்கரம். $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$, $\vec{OD} = \vec{d}$ ஆகும்.

D, E, F, G என்பன முறையே AB, BC, CD, DA ன் மையப்புள்ளிகள்



∴ $\vec{OD} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$, $\vec{OE} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$, $\vec{OF} = \frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}$, $\vec{OG} = \frac{\vec{d}+\vec{a}}{2}$

DF ன் மையப்புள்ளியின் நிலைவெக்டர் : $\frac{\vec{OD}+\vec{OF}}{2} = \frac{\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} + \frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}}{2} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$

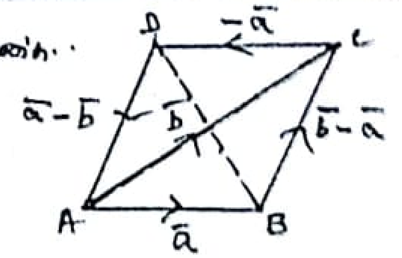
GE யின் மையப்புள்ளியின் நி.வெ = $\frac{\vec{OG}+\vec{OE}}{2} = \frac{\frac{\vec{a}+\vec{d}}{2} + \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}}{2} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$

DF, GE யின் மையப்புள்ளிகள் சமம். எனவே மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமகூறிடுகின்றன. எனவே DEFG ஒரு இணைகரமாகும்.

7) $\bar{a}, \bar{b}$ ஆகியவை இணைகரத்தின் ஒருபக்கத்தையும் ஒரு மூலைவிட்டத்தையும் குறித்தால் அதன் பிற பக்கங்களையும் மற்றொரு மூலைவிட்டத்தையும் காண்க.
8.1

வழிமுறை: இணைகரத்தில் எதிர் எதிர் பக்கங்கள் சமம் மற்றும் எதிர்திசை. இணைகரத்தில் ஒரு பக்கமும் ஒரு மூலைவிட்டமும் கொடுக்கப்பட்டால் முக்கோண கூட்டல் விதிப்படி அவற்றுக்கிடைப்பட்ட பக்கத்தை காணலாம். இன்னொரு பக்கம் அதன் எதிர்மறையாக காணலாம். மற்றொரு மூலைவிட்டத்தையும் மு.கூ.வி. படி காணலாம்.

இணைகரம் ABCD யில் $\bar{AB}=\bar{a}$, $\bar{AC}=\bar{b}$ என்க.



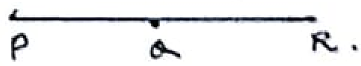
$$\bar{AB}+\bar{BC}=\bar{AC}$$
$$\bar{BC}=\bar{AC}-\bar{AB}$$
$$=\bar{b}-\bar{a}$$
$$\bar{CD}=-\bar{a}$$
$$\bar{DA}=-(\bar{b}-\bar{a})=\bar{a}-\bar{b}$$
$$\bar{BD}=\bar{BC}+\bar{CD}=(\bar{b}-\bar{a})-\bar{a}$$
$$=\bar{b}-2\bar{a}$$

8) $\bar{PO}+\bar{OQ}=\bar{QO}+\bar{OR}$ எனில் P, Q, R என்பன ஒரு கோட்டமைப்புள்ளிகள் என நிறுவுக.

வழிமுறை: LHS, RHS ஒவ்வொன்றும் வெக்டர்களாக சுருக்கி இரண்டையும் கூட்டினால் ஒரு வெக்டராக வரும். அதாவது இரு வெக்டர்களின் கூடுதல் 3வது வெக்டருக்கு சமம்.

$\bar{PO}+\bar{OQ}=\bar{PQ}$ மேலும்

$\bar{QO}+\bar{OR}=\bar{QR}$ $\quad \bar{PQ}=\bar{QR}$



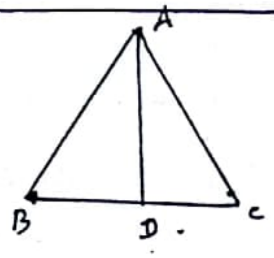
$$\bar{PQ}+\bar{QR}=\cancel{\bar{OQ}}-\bar{OP}+\bar{OR}-\cancel{\bar{OQ}}$$
$$=\bar{OR}-\bar{OP}$$
$$=\bar{PR}$$

∴ P, Q, R. ஒரு கோடமைவன.

9) முக்கோணம் ABC யில் பக்கம் BC யின் மையப்புள்ளி D எனில் $\bar{AB}+\bar{AC}=2\bar{AD}$ என நிறுவுக.

வழிமுறை: $\bar{AB}, \bar{AC}$ ஐ மு.கூ.வி. பயன்படுத்திக் காண்க. பின் $\bar{AD}$ சேர்ந்து இருக்க வேண்டும். D, BC யின் மையப்புள்ளியாகையால் பயன்படுத்த $\bar{DC}=-\bar{DB}$ எனக் கொள்க.

△ABC யில் D என்பது BC யின் நடுப்புள்ளி.



$\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB}$ ——— ①

$\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC}$ ஆனால் $\overline{DC} = -\overline{DB}$

$= \overline{AD} - \overline{DB}$ ——— ②

$\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DB} + \overline{AD} - \overline{DB}$

$= 2\overline{AD}$

10) △ABC யின் நடுக்கோட்டுச் சந்தி G எனில் $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \overline{0}$ எனக்காட்டுக.

வழிமுறை: முக்கோணம் ABC யின் நடுக்கோட்டுச்சந்தி $\overline{OG} = \frac{\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}}{3}$ என்பது தெரியும். இதை பயன்படுத்தி $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC}$ காண வேண்டும்.

முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டுச்சந்தி $\overline{OG} = \frac{\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}}{3}$.

$\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \overline{OA} - \overline{OG} + \overline{OB} - \overline{OG} + \overline{OC} - \overline{OG}$

$= \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} - 3\overline{OG}$

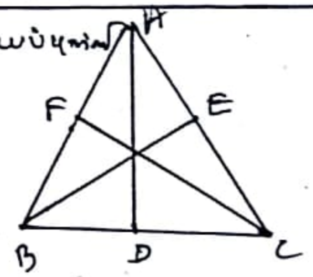
$= (\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}) - (\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$

$= \overline{0}$

11) A, B, C என்பன முக்கோணத்தின் முனைப்புள்ளிகள் மற்றும் D, E, F என்பவை BC, CA, AB ன் மையப்புள்ளிகள் எனில் $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \overline{0}$ எனக்காட்டுக.

வழிமுறை: $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ நடுக்கோடுகளை அனைத்தையும் முக்கோணத்தின் எதிர்திசையில் அமைப்புள்ளி ஆகும். மேலும் D, E, F என்பன மையப்புள்ளிகள் என்பதையும் பயன்படுத்தி $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ கூட்டுதலால் விடை கிடைக்கும்.

△ABC யில் D, E, F முறையே BC, CA, AB ன் மையப்புள்ளிகள்



$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD}$

$= \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC}$

$\overline{BE} = \overline{BC} + \overline{CE} = \overline{BC} + \frac{1}{2}\overline{CA}$

$\overline{CF} = \overline{CA} + \overline{AF} = \overline{CA} + \frac{1}{2}\overline{AB}$

$\therefore \overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC} + \overline{BC} + \frac{1}{2}\overline{CA} + \overline{CA} + \frac{1}{2}\overline{AB}$

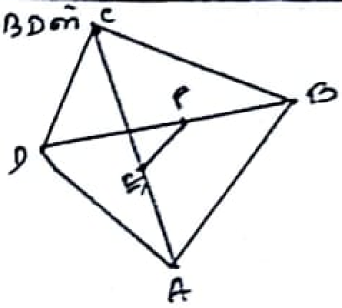
$= \frac{3}{2}(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA})$

$= \frac{3}{2}(\overline{0}) = \overline{0}$

12) ABCD என்ற நாற்கரத்தில் AC, BD யின் நடுப்புள்ளிகள் E, F எனில் $\overline{AB}+\overline{AD}+\overline{CB}+\overline{CF} = 4\overline{EF}$ எனக் காட்டு.

வழிமுறை: முக்கோண விதியை பயன்படுத்தி $\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{CB}, \overline{CD}$ களை வெக்டர்களின் கூட்டலாக $\overline{EF}$ உள்ளடக்கியதாக அமைக்கவேண்டும். E, F என்பன AC, BD யின் மையப்புள்ளிகள். $\overline{AE} = -\overline{CE}$, $\overline{FB} = -\overline{FD}$ என்பதை பயன்படுத்த வேண்டும்.

ABCD ஒரு நாற்கரம். E, F முறையே AC, BD ன் மையப் புள்ளிகள்



$$\overline{AB} = \overline{AE}+\overline{EF}+\overline{FB}$$
$$\overline{AD} = \overline{AE}+\overline{EF}+\overline{FD}$$
$$\overline{CB} = \overline{CE}+\overline{EF}+\overline{FB}$$
$$\overline{CD} = \overline{CE}+\overline{EF}+\overline{FD}$$
$$\overline{AB}+\overline{AD}+\overline{CB}+\overline{CD} = 2(\overline{AE}+\overline{CE})+4\overline{EF}+2(\overline{FD}+\overline{FB})$$
$$= 2(0)+4\overline{EF}+2(0) \quad \because \overline{AE} = -\overline{CE},\ \overline{FB} = -\overline{FD}$$
$$= 4\overline{EF}$$

பயிற்சி – 8.2.

எ.கா. 8.4: $5\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ ன் திசையில் ஓர் அலகு வெக்டரை காண்க.

வழிமுறை: $\overline{a}$ ன் திசையில் அமைந்த ஓரலகு வெக்டர் $\frac{\overline{a}}{|\overline{a}|} = \hat{a}$

தீர்வு: $\overline{a} = 5\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ $|\overline{a}| = \sqrt{25+9+16} = \sqrt{50}$

$$\hat{a} = \frac{\overline{a}}{|\overline{a}|} = \frac{5\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}}{\sqrt{50}}$$

எ.கா. 8.5. கீழ் காணும் வெக்டர்களுக்கு திசை விகிதங்கள் மற்றும் திசை கொசைன்கள் காண்க.

i) $3\hat{i}+4\hat{j}-6\hat{k}$ 2) $3\hat{i}-4\hat{k}$

வழிமுறை: $\overline{r} = x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ எனில் திசை விகிதங்கள் $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ வெக்டர்களின் கெழுக்கள். $|\overline{r}|$ காண வேண்டும்.
$|\overline{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ திசை கொசைன்கள் $\frac{x}{|\overline{r}|}, \frac{y}{|\overline{r}|}, \frac{z}{|\overline{r}|}$

i) $\overline{r} = 3\hat{i}+4\hat{j}-6\hat{k}$ திசை விகிதங்கள் 3, 4, −6.
திசை கொசைன்கள் $|\overline{r}| = \sqrt{9+16+36} = \sqrt{61}$

$$\therefore \frac{3}{\sqrt{61}}, \frac{4}{\sqrt{61}}, \frac{-6}{\sqrt{61}}$$

ஆ) $3\hat{i} - 4\hat{k}$ திசை விகிதங்கள் $3, 0, -4$

$|\vec{r}| = \sqrt{9+16} = 5$ $\therefore$ திசை கொசைன்கள் $\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}$

பயிற்சி 8.6 1) $2, 3, -6$ திசை விகிதங்களை கொண்ட வெக்டரின் திசைக் கொசைன்களை காண்க.

2) $30°, 45°, 60°$ ஆகியவை ஒரு வெக்டருக்கு திசைக் கோணங்களாகுமா

3) $A(2,3,1)$ $B(3,-1,2)$ எனில் $\overline{AB}$ வெக்டரின் திசைக் கொசைன்களை காண்க.

4) $(2,3,1)$ மற்றும் $(3,-1,2)$ ஐ இணைக்கும் கோட்டின் திசைக் கொசைன்களை காண்க.

5. $2, 3, 6$ திசை விகிதங்களாகவும் எண்ணளவு 5 உடைய வெக்டரை காண்க.

---

1) $\bar{r} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$ $|\bar{r}| = \sqrt{4+9+36} = 7$

திசைக் கொசைன் $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{6}{7}$

2) $\cos^2 30 + \cos^2 45 + \cos^2 60 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} > 1.$

இது ஒரு வெக்டருக்கு திசை கோணங்களாக இருக்க இயலாது

$(\because \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1)$

3) $\overline{AB} = \hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$

$|\overline{AB}| = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18}$ திசைக் கொசைன் $\frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{-4}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}$

4) $\overline{AB} = \hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$

$|\overline{AB}| = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18}$ 〃 $\frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{-4}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}$

5) $\bar{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$

$|\bar{a}| = \sqrt{4+9+36} = 7$

$\hat{a} = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \frac{2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}}{7}$

$5\hat{a} = \frac{5}{7}(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$

எ.கா. 8.7 $2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$, $3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$, மற்றும் $6\hat{i} - 5\hat{j} + 7\hat{k}$ ஆகியவற்றை நிலைவெக்டர்களாகக் கொண்ட புள்ளிகள் ஒரே நேர்க் கோட்டில் அமையும் எனக் காட்டு.

வழிமுறை: $\vec{AB}, \vec{AC}$ ஆகிய வெக்டர்கள் $\vec{AC} = t\vec{AB}$ என்ற நிலையில் இரண்டும் இணை வெக்டர்கள் மேலும் A பொதுவானதால் நிரூபிக்க வேண்டும். எனவே 3 புள்ளிகளும் ஒரு கோட்டில் அமைந்துள்ளதாக கூறலாம். இதை மாற்று முறையிலும் செய்யலாம். இரு கோட்டுத்துண்டுகளின் கூடுதல் மொத்த நீளத்திற்கு சமம் எனில் ஒரு கோட்டமைவானது.

தீர்வு: $\vec{OA} = 2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}$, $\vec{OB} = 3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$, $\vec{OC} = 6\hat{i}-5\hat{j}+7\hat{k}$ என்பவற்றை நிலை வெக்டர்களாகக் கொண்ட புள்ளிகள்

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$

$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = 4\hat{i}-8\hat{j}+12\hat{k}$

$\vec{AC} = 4(\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k})$ இங்கு $\vec{AB}, \vec{AC}$ இணை

$= 4\vec{AB}$ ∴ A பொதுப் புள்ளி

எனவே A, B, C ஒரு கோட்டில் அமையும்.

எ.கா. 8.8 எண்ணளவை 5ம் $4\hat{i}-3\hat{j}+10\hat{k}$ க்கு இணையாகவும் உள்ள நிலை வெக்டராக கொண்ட புள்ளியை காண்க.

வழிமுறை: $5\hat{a}$ கண்டுபிடித்து புள்ளி வழியால் அறிந்து கொண்டோம்

$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

தீர்வு: $\vec{a} = 4\hat{i}-3\hat{j}+10\hat{k}$ $|\vec{a}| = \sqrt{16+9+100} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{4\hat{i}-3\hat{j}+10\hat{k}}{5\sqrt{5}}$

$5\hat{a} = \frac{\cancel{5}(4\hat{i}-3\hat{j}+10\hat{k})}{\cancel{5}\sqrt{5}}$ ∴ தேவையான புள்ளி

$\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{-3}{\sqrt{5}}, \frac{10}{\sqrt{5}}\right)$

எ.கா. 8.9. $2\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$, $4\hat{i}+\hat{j}+9\hat{k}$, $10\hat{i}-\hat{j}+6\hat{k}$ என்ற வெக்டர்களை நிலைப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட புள்ளிகள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை உருவாக்கும் எனக்காட்டு.

வழிமுறை: $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ லிருந்து $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CA}$ காண்க அவற்றின் மட்டு மதிப்புகள் அந்தந்த பக்கங்களின் நீளங்கள். பிதாகரஸ் தேற்றப்படி இரு பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 3 வது வர்க்கத்திற்கு சமமாக இருந்தால் அது ஒரு செங்கோண முக்கோணமாகும்.

$\vec{OA} = 2\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$ $\vec{AB} = 2\hat{i}-3\hat{j}+6\hat{k}$ $|\vec{AB}| = \sqrt{4+9+36} = 7$

$\vec{OB} = 4\hat{i}+\hat{j}+9\hat{k}$ $\vec{BC} = 6\hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k}$ $|\vec{BC}| = \sqrt{36+4+9} = 7$

$\vec{OC} = 10\hat{i}-\hat{j}+6\hat{k}$ $\vec{CA} = -8\hat{i}+5\hat{j}+3\hat{k}$ $|\vec{CA}| = \sqrt{64+25+9} = \sqrt{98}$

$AB^2 + BC^2 = AC^2$ $\quad AB + BC + CA = 0$ ∴ முதல் முக்கோணம்

$49 + 49 = 98$ ∴ இது இருசமபக்க செங்கோண முக்கோணம்.

எ.கா: $5\vec{i}+6\vec{j}+7\vec{k}$, $7\vec{i}-8\vec{j}+9\vec{k}$, $3\vec{i}+20\vec{j}+5\vec{k}$ ஆகிய வெக்டர்கள்
8.10 ஒருதள வெக்டர்கள் எனக் காட்டுக

வழிமுறை: ஒரு வெக்டர் மற்ற இரண்டு வெக்டர்களையும் வெவ்வேறு எண்களால் பெருக்கி கூட்டினால் கிடைக்க வேண்டும். அந்த இரண்டு எண்கள் வெவ்வேறாக எடுத்துக்கொண்டு அவற்றை காண வேண்டும்.

தீர்வு: $5\vec{i}+6\vec{j}+7\vec{k}$, $7\vec{i}-8\vec{j}+9\vec{k}$, $3\vec{i}+20\vec{j}+5\vec{k}$ ஆகிய வெக்டர்கள் ஒருதள வெக்டர்கள் எனக் காட்டுக.

$5\vec{i}+6\vec{j}+7\vec{k} = s(7\vec{i}-8\vec{j}+9\vec{k}) + t(3\vec{i}+20\vec{j}+5\vec{k})$ என்க.

ஒத்த உறுப்புகளை ஒப்பிட

$5 = 7s + 3t$

$6 = -8s + 20t$

$7 = 9s + 5t$

தீர்க்க. ① × 5 $\quad 35s + 15t = 25$

③ × 3 $\quad 27s + 15t = 21$

$8s = 4$

$s = 1/2$

∴ $5\vec{i}+6\vec{j}+7\vec{k} = \frac{1}{2}(7\vec{i}-8\vec{j}+9\vec{k}) + \frac{1}{2}(3\vec{i}+20\vec{j}+5\vec{k})$ $\quad t = 1/2$

∴ இந்த வெக்டர்கள் ஒருதள வெக்டர்கள் ஆகும்.

$\frac{1}{8.2}$ கீழ்காணும் விகிதங்களை திசைக் கொசைன்களாக கொண்டு ஒரு வெக்டர் அமையுமா சரிபார்க்க.

1) $\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ $\quad$ 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ $\quad$ 3) $4/3, 0, 3/4$.

வழிமுறை: கொடுக்கப்பட்டவை $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ ஆகும். இவை திசைக் கொசைன்கள் வெக்டராக அமைய வேண்டுமெனில் $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ ஆகும்.

1) $\cos\alpha = 1/5 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{25}$ $\quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$

$\cos\beta = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos^2\beta = \frac{9}{25}$ $\quad = \frac{1}{25} + \frac{9}{25} + \frac{16}{25} \neq 1$

$\cos\gamma = 4/5 \Rightarrow \cos^2\gamma = \frac{16}{25}$ இவை திசை வெக்டராக அமையாது தி.கொ.அ.

2) $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{2}$ $\quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$

$\cos\beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos^2\beta = \frac{1}{4}$ $\quad = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$

$\cos\gamma = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos^2\gamma = \frac{1}{4}$ ∴ இவை ஒரு வெக்டராக அமையும் தி.கொ. ஆகும்.

3) $\cos\alpha = 4/3 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{16}{9}$. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$

$\cos\beta = 0 \Rightarrow \cos^2\beta = 0$ $= \frac{16}{9} + 0 + \frac{9}{16} \neq 1$.

$\cos\gamma = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos^2\gamma = \frac{9}{16}$. இது ஒரு வெக்டரின் தி.கோ. ஆ.

$\frac{2)}{8.2}$ கொடுக்கப்பட்ட திசை விகிதங்களை கொண்ட வெக்டரின் திசைக் கொசைன்களை காண்க.

1) 1, 2, 3   2) 3, −1, 3   4) 0, 0, 7.

வழிமுறை: திசை விகிதங்களை கொண்டு வெக்டர் அமைக்க $\bar{a}$. $|\bar{a}|$ காண்க. தி.கோ. $\left(\frac{x}{|\bar{a}|}, \frac{y}{|\bar{a}|}, \frac{z}{|\bar{a}|}\right)$ $\bar{a} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$.

---

1) $\bar{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ $|\bar{a}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$ தி.கோ. $\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}$.

2) $\bar{a} = 3\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ $|\bar{a}| = \sqrt{9+1+9} = \sqrt{19}$ தி.கோ. $\frac{3}{\sqrt{19}}, \frac{-1}{\sqrt{19}}, \frac{3}{\sqrt{19}}$.

3) $\bar{a} = 7\hat{k}$ $|\bar{a}| = 7$ தி.கோ. 0, 0, 1

$\frac{3)}{8.2}$ கீழ்காணும் வெக்டர்களுக்கு திசைக் கொசைன்கள் மற்றும் தி.வி காண்க

1) $3\hat{i} - 4\hat{j} + 8\hat{k}$ 2) $3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ 3) $\hat{j}$

4) $5\hat{i} - 3\hat{j} - 48\hat{k}$ 5) $3\hat{i} - 3\hat{k} + 4\hat{j}$ 6) $\hat{i} - \hat{k}$.

வழிமுறை! தி.வி என்பது $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ன் கெழுக்கள்

தி.கோ. என்பது $\frac{x}{|\bar{a}|}, \frac{y}{|\bar{a}|}, \frac{z}{|\bar{a}|}$

தீர்வு 1) $\bar{a} = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 8\hat{k}$ தி.கோ: $\frac{3}{\sqrt{89}}, \frac{-4}{\sqrt{89}}, \frac{8}{\sqrt{89}}$

$|\bar{a}| = \sqrt{9+16+64} = \sqrt{89}$

தி.வி: 3, −4, 8.

---

2) $\bar{a} = 3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ தி.கோ. $\frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}$

$|\bar{a}| = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}$ தி.வி: 3, 1, 1

3) $\bar{a} = \hat{j}$ $|\bar{a}| = 1$ தி.கோ. 0, 1, 0

தி.வி. 0, 1, 0.

4) $\bar{a} = 5\hat{i} - 3\hat{j} - 48\hat{k}$ தி.கோ: $\frac{5}{\sqrt{2338}}, \frac{-3}{\sqrt{2338}}, \frac{-48}{\sqrt{2338}}$

$|\bar{a}| = \sqrt{2338}$ தி.வி: 5, −3, −48

5) $\bar{a} = 3\bar{i}+4\bar{j}-3\bar{k}$ தி.கொ : $\frac{3}{\sqrt{34}}, \frac{4}{\sqrt{34}}, \frac{-3}{\sqrt{34}}$

$|\bar{a}| = \sqrt{9+16+9} = \sqrt{34}$

தி.வி $3, 4, -3$.

6) $\bar{a} = \bar{i}-\bar{k}$ தி.கொ: $\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$|\bar{a}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

தி.வி: $1, 0, -1$

$\frac{4}{8.2}$ புள்ளிகள் $(1,0,0)$ $(0,1,0)$ $(0,0,1)$ ஆகியவற்றை முனைப்புள்ளிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகளின் திசைக்கொசைன் காண்க.

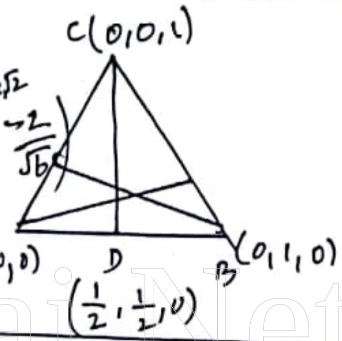
வழிமுறை: முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளை காண்க. இவ்வாறு நடுக்கோட்டின் தி.கொ காண்க. பிறகு திசை விகிதம் காண்க.

$\bar{CD} = \frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j-k$

$|\bar{CD}| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1} = \sqrt{3/2}$ தி.கொ. $\frac{1/2}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}, \frac{1/2}{\sqrt{3}/\sqrt{2}}, \frac{-2}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}$

$= \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$

இதுபோல் $\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}$ $\left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$



$\frac{5}{8.2}$ $\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, a$ என்பவை ஒரு வெக்டரின் திசைக் கொசைன்கள் எனில் a காண்க.

வழிமுறை: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1$ (or) திசைக்கொசைன்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 1.

$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+a^2 = 1$

$a^2 = 1-\frac{3}{4} = 1/4$

$a = \pm 1/2$

$\frac{7}{8.2}$) $2i-j+\bar{k}$, $3i-4j-4\bar{k}$, $i-3j-5\bar{k}$ ஆகிய வெக்டர்கள் செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கும் எனக் காட்டு.

வழிமுறை: கொடுக்கப்பட்டவை கோட்டு வெக்டர்கள் எனவே அதன் மட்டு மதிப்பு கண்டால் பக்கங்களின் நீளங்கள் கிடைக்கும். பிதாகரஸ் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி செங்கோண முக்கோணம் எனக்காண்.

$\bar{a} = 2i-j+\bar{k}$ $|\bar{a}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$ $|\bar{a}|^2+|\bar{c}|^2 = 6+35$

$\bar{b} = 3i-4j-4\bar{k}$ $|\bar{b}| = \sqrt{9+16+16} = \sqrt{41}$ $= 41$

$\bar{c} = i-3j-5\bar{k}$ $|\bar{c}| = \sqrt{1+9+25} = \sqrt{35}$ $= |\bar{b}|^2$

$\therefore$ இது செங்கோண முக்கோணம்.

8) 8.2 $\bar{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 9\hat{k}$ மற்றும் $\bar{b} = \hat{i} + \lambda\hat{j} + 3\hat{k}$ ஆகிய வெக்டர்கள் இணையெனில் λ-ன் மதிப்பு காண்க.

வழிமுறை: இரு வெக்டர்கள் இணை எனில் ஒத்த வெக்டர்களின் கூறுகளின் விகிதம் சமம்

$\frac{1}{3} = \frac{2}{\lambda} = \frac{9}{3}$

$\lambda = 2/3$

$$\frac{1}{3} = \frac{\lambda}{2} = \frac{3}{9} \Rightarrow \lambda = 2/3.$$

9) 8.2 கீழ்காணும் வெக்டர்கள் ஒருதள வெக்டர்கள் எனக்காட்டுக.

1) $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $-2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$, $-\hat{j} + 2\hat{k}$

2) $5\hat{i} + 6\hat{j} + 7\hat{k}$, $7\hat{i} - 8\hat{j} + 9\hat{k}$, $3\hat{i} + 20\hat{j} + 5\hat{k}$.

வழிமுறை: $\bar{a} = s\bar{b} + t\bar{c}$ என்ற அமைப்பில் எழுதினால் ஒருதளவெக்டர்கள். இங்கு s, t காண ஒத்த வெக்டர்களின் கூறுகளை சமன் செய்து காண வேண்டும்.

1) $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k} = s(-2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}) + t(-\hat{j} + 2\hat{k})$

$1 = -2s \Rightarrow s = -1/2$

$-2 = 3s - t \Rightarrow -2 = 3(-1/2) - t$

$t = 1/2$

$\therefore \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k} = -\frac{1}{2}(-2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}) + \frac{1}{2}(-\hat{j} + 2\hat{k})$

2) Same as Ex. 10.

10) 8.2 $4\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$, $-\hat{j} - \hat{k}$, $3\hat{i} + 9\hat{j} + 4\hat{k}$ மற்றும் $-4\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}$ ஆகியவற்றை நிலைவெக்டர்களாகக் கொண்ட புள்ளிகள் ஒரு தளத்தில் அமைவன எனக் காண்க.

வழிமுறை: புள்ளியின் நிலை வெக்டராக இல்லாமல் முதலில் கோட்டு வெக்டராக மாற்ற வேண்டும். $\overline{OA}, \overline{OB}$ கொடுத்தால் $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$ எனக்காண வேண்டும். கோட்டுவெக்டர்களை $\bar{a} = s\bar{b} + t\bar{c}$ என்ற வடிவில் அமைத்தால் போதும்.

$\overline{OA} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$	$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = -4\hat{i} - 6\hat{j} - 2\hat{k}$
$\overline{OB} = -\hat{j} - \hat{k}$	$\overline{BC} = 3\hat{i} - 6\hat{j} - 2\hat{k}$
$\overline{OC} = 3\hat{i} + 9\hat{j} + 4\hat{k}$	$\overline{CD} = 7\hat{i} - 5\hat{j}$
$\overline{OD} = -4\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}$	

$$-4\hat{i}-6\hat{j}-2\hat{k} = s(3\hat{i}-6\hat{j}-2\hat{k}) + t(7\hat{i}-5\hat{j})$$

$$-4 = 3s+7t$$
$$-6 = 10s-5t$$
$$-2 = 5s \Rightarrow s = -2/5$$
$$7t = -4-3(-2/5)$$
$$= -4+\frac{6}{5} = \frac{-20+6}{5} = -\frac{14}{5}$$
$$t = -\frac{14}{5\times 7} = -2/5$$

$$\therefore -4\hat{i}-6\hat{j}-2\hat{k} = -2/5(3\hat{i}-6\hat{j}-2\hat{k}) - 2/5(7\hat{i}-5\hat{j})$$

$\frac{11}{8.2}$) $\bar{a} = 2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}$, $\bar{b} = 3\hat{i}-4\hat{j}-5\hat{k}$, $\bar{c} = -3\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ எனில் கீழ்காணும் வெக்டர்களின் அளவையும் தி.கொ. காண்க. 1) $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$ 2) $3\bar{a}-2\bar{b}+5\bar{c}$

வழிமுறை: முதலில் $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$, $3\bar{a}-2\bar{b}+5\bar{c}$ காண்க. பிறகு அளவையும், தி.கொ. காண்க.

1) $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c} = 2\hat{i}+\hat{j}-6\hat{k}$

$|\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}| = \sqrt{4+1+36} = \sqrt{41}$ தி.கொ: $\frac{2}{\sqrt{41}}, \frac{1}{\sqrt{41}}, \frac{-6}{\sqrt{41}}$

2) $3\bar{a}-2\bar{b}+5\bar{c} = 3(2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}) - 2(3\hat{i}-4\hat{j}-5\hat{k}) + 5(-3\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$

$= -15\hat{i}+27\hat{j}+13\hat{k}$

$|3\bar{a}-2\bar{b}+5\bar{c}| = \sqrt{1123}$.

தி.கொ: $\frac{-15}{\sqrt{1123}}, \frac{27}{\sqrt{1123}}, \frac{13}{\sqrt{1123}}$.

$\frac{12}{8.2}$) $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$, $3\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}$ மற்றும் $-2\hat{i}+3\hat{j}-7\hat{k}$ ஆகியவை முக்கோணத்தின் முனைப்புள்ளிகள் எனில் அதன் சுற்றளவை காண்க.

வழிமுறை: முனைப்புள்ளிகளைக் கொண்டு கோட்டுத்துண்டுகளின் நிலையும் $(\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA})$ அவற்றின் கோட்டுத்துண்டின் அளவை காண்க. பின்பு பக்கங்களையும் கூட்டு.

$\overline{OA} = \hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$	$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = 2\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$
$\overline{OB} = 3\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}$	$\overline{BC} = -5\hat{i}+7\hat{j}-12\hat{k}$
$\overline{OC} = -2\hat{i}+3\hat{j}-7\hat{k}$	$\overline{CA} = 3\hat{i}-\hat{j}+10\hat{k}$.

$|\overline{AB}| = \sqrt{4+36+4} = \sqrt{44}$

$|\overline{BC}| = \sqrt{25+49+144} = \sqrt{218}$

$|\overline{CA}| = \sqrt{9+1+100} = \sqrt{110}$

∴ சுற்றளவு = $\sqrt{44} + \sqrt{218} + \sqrt{110}$

13/8.2) $\bar{a} = 3\hat{i}-\hat{j}-4\hat{k}$, $\bar{b} = -2\hat{i}+4\hat{j}-3\hat{k}$, $\bar{c} = \hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ எனில் $3\bar{a}-2\bar{b}+4\bar{c}$ என்ற வெக்டருக்கு இணையான அலகு வெக்டரை காண்க.

வழிமுறை: $3\bar{a}-2\bar{b}+4\bar{c}$ காண்க. இதை $\bar{d}$ எனக். மேலும் $\hat{d}$ காண்க. $\hat{d} = \dfrac{\bar{d}}{|\bar{d}|}$.

$3\bar{a} = 9\hat{i}-3\hat{j}-12\hat{k}$	$3\bar{a}-2\bar{b}+4\bar{c}$
$-2\bar{b} = 4\hat{i}-8\hat{j}+6\hat{k}$	$\bar{d} = 17\hat{i}+3\hat{j}+10\hat{k}$ எனக்.
$4\bar{c} = 4\hat{i}+8\hat{j}-4\hat{k}$	

$|\bar{d}| = \sqrt{289+9+100} = \sqrt{398}$

$$\hat{d} = \frac{17\hat{i}+3\hat{j}+10\hat{k}}{\sqrt{398}}.$$

15/8.2) P, Q, R, S என்ற 4 புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் முறையே $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $2\hat{i}+5\hat{j}$, $3\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$, $\hat{i}-6\hat{j}-\hat{k}$ எனில் PQ மற்றும் RS இணையானவை எனக்காட்டு.

வழிமுறை: $\overline{OP}, \overline{OQ}, \overline{OR}, \overline{OS}$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இதில் $\overline{PQ} = \overline{OQ}-\overline{OP}$, $\overline{RS} = \overline{OS}-\overline{OR}$ காணவேண்டும். $\overline{PQ} = t(\overline{RS})$ என கிடைத்தால் இணை என்று கொள்ளலாம்.

$\overline{OP} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$	$\overline{PQ} = \overline{OQ}-\overline{OP} = \hat{i}+4\hat{j}-\hat{k}$
$\overline{OQ} = 2\hat{i}+5\hat{j}$	$\overline{RS} = -2\hat{i}-8\hat{j}+2\hat{k}$
$\overline{OR} = 3\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$	$= -2(\hat{i}+4\hat{j}-\hat{k})$
$\overline{OS} = \hat{i}-6\hat{j}-\hat{k}$	$= -2\overline{PQ}$ ∴ PQ, RS இணை.

16) 8.2 $m(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$ ஓர் அலகு வெக்டர் எனில் m ன் மதிப்பு காண்க.

வழிமுறை : $\hat{a} = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = m(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$ என்பதைக் கொண்டு m காண்க.

$$\frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \pm\frac{\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}}{1/m} \Rightarrow |\bar{a}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$\pm\frac{1}{m} = \sqrt{3} \quad m = \pm 1/\sqrt{3}$$

17) 8.2 A(1,1,1) B(1,2,3) C(2,−1,1) ஆகிய புள்ளிகள் ஓர் இருசமபக்க முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் என நிரூபிக்க.

வழிமுறை: புள்ளி வெக்டர்களைக் கொண்டு கோட்டு வெக்டர்களைக் காண்க ($\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$). இரு பக்கங்களின் எண் அளவுகள் அவற்றில் ஏதேனும் 2 சமமெனில் இருசமபக்க முக்கோணம்.

$\overline{OA} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$	$\overline{AB} = \hat{i}+2\hat{k}$	$\lvert\overline{AB}\rvert = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$
$\overline{OB} = \hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$	$\overline{BC} = \hat{i}-3\hat{j}-2\hat{k}$	$\lvert\overline{BC}\rvert = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$
$\overline{OC} = 2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$	$\overline{CA} = -\hat{i}+2\hat{j}$	$\lvert\overline{CA}\rvert = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$$\therefore |\overline{AB}| = |\overline{CA}|$$

∴ இது ஒரு இருசமபக்க முக்கோணம்.

6) 8.2 $\bar{a}, \bar{a}+\bar{b}, \bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$ என்பவை (1,0,0) (0,1,0) ஆகியவற்றை இணைக்கும் கோட்டின் தி.வி. எனில் a, b, c காண்க.

(1,0,0) (0,1,0) இணைக்கும் கோட்டின் தி.வி $= -1, 1, 0$

$$\Rightarrow a = -1 \quad a+b = 1 \quad a+b+c = 0$$

$$-1+b = 1 \quad -1+2+c = 0$$

$$b = 2 \quad c = -1$$

பயிற்சி - 8.3

எ.கா: 8.11. கீழ்க்காண்பவைகளுக்கு $\bar{a}\cdot\bar{b}$ காண்க.

1) $\bar{a} = \hat{i} - \hat{j} + 5\bar{k}$ $\quad \bar{b} = 3\hat{i} - 2\bar{k}$.

2) $\bar{a}$ மற்றும் $\bar{b}$ ஆகியவை $(2,3,-1)$ மற்றும் $(-1,2,3)$ என்ற புள்ளிகளை இருக்கும் புள்ளிகள்.

வழிமுறை: $\bar{a}\cdot\bar{b}$ காண ஒத்த வெக்டர்களின் கூறுகளை பெருக்கி கூட்டவும். மேலும் புள்ளிகளாக கொடுத்தால் அதை வெக்டர் வடிவத்திற்கு மாற்றவும்.

1) $\bar{a}\cdot\bar{b} = (\hat{i} - \hat{j} + 5\bar{k})\cdot(3\hat{i} - 2\bar{k})$

$= 3 + 0 - 10 = -7.$

2) $\bar{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \bar{k}$

$\bar{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 3\bar{k}$

$\bar{a}\cdot\bar{b} = -2 + 6 - 3 = 1$

எ.கா: 8.12 $\bar{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \bar{k}$ $\quad \bar{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 3\bar{k}$ எனில் $(\bar{a} + 3\bar{b})\cdot(2\bar{a} - \bar{b})$ காண்க.

வழிமுறை: முதலில் $a + 3\bar{b}$, $2\bar{a} - \bar{b}$ ஆகியவற்றை கண்டுபிடித்து புள்ளி பெருக்கல் காண வேண்டும். ஒத்த வெக்டர்களின் கூறுகளை பெருக்கி கூட்ட வேண்டும்.

$\bar{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \bar{k}$ $\quad \bar{a} + 3\bar{b} = -\hat{i} + 9\hat{j} + 8\bar{k}$

$3\bar{b} = -3\hat{i} + 6\hat{j} + 9\bar{k}$

$2\bar{a} = 4\hat{i} + 6\hat{j} - 2\bar{k}$ $\quad 2\bar{a} - \bar{b} = 5\hat{i} + 4\hat{j} - 5\bar{k}$.

$\bar{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 3\bar{k}$

$(\bar{a} + 3\bar{b})(2\bar{a} - \bar{b}) = -5 + 36 - 40.$

$= 9.$

எ.கா. 8.13 $\bar{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\bar{k}$ $\quad \bar{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \bar{k}$ $\quad \bar{c} = 3\hat{i} + \hat{j}$ மேலும் $\bar{a} + \lambda b$ ஆனது $\bar{c}$ க்கு செங்குத்து எனில் λ ன் மதிப்பு காண்க.

வழிமுறை: $a + \lambda b$ காண வேண்டும். பிறகு $\bar{a} + \lambda\bar{b}$ க்கும் $\bar{c}$ க்கும் புள்ளிப்பெருக்கல் போட்டு 0 எனக் கொள்ள வேண்டும் (செங்குத்து என்பதால்) இதில் λ ன் மதிப்பு கிடைக்கும்.

$\bar{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\bar{k}$ $\quad \therefore \bar{a} + \lambda\bar{b} = (2-\lambda)\hat{i} + (2+2\lambda)\hat{j} + (3+\lambda)\bar{k}$

$\lambda\bar{b} = -\lambda\hat{i} + 2\lambda\hat{j} + \lambda\bar{k}$ $\quad \bar{c} = 3\hat{i} + \hat{j}$.

• $\bar{a}+\lambda\bar{b}, \bar{c}$ செங்குத்து $\therefore (\bar{a}+\lambda\bar{b})\cdot\bar{c}=0$

$$(\bar{a}+\lambda\bar{b})\cdot\bar{c} = (2-\lambda)3+(2+2\lambda)\cdot 1 = 0$$

$$\lambda = 8.$$

எ.கா: 8.14 $|\bar{a}+\bar{b}| = |\bar{a}-\bar{b}|$ எனில் $\bar{a}, \bar{b}$ செங்குத்து எனநிறுவுக.

வழிமுறை: $|\bar{a}+\bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2+2\bar{a}\cdot\bar{b}$ பயன்படுத்தவும்

இதேபோல் $|\bar{a}-\bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2-2\bar{a}\cdot\bar{b}$ "

இவை சமம் எனக் கொண்டால் $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$ கிடைக்கும்

$\therefore \bar{a}\perp\bar{b}.$

$$|\bar{a}+\bar{b}| = |\bar{a}-\bar{b}|$$

$$|\bar{a}+\bar{b}|^2 = |\bar{a}-\bar{b}|^2$$

$$\cancel{|\bar{a}|^2}+\cancel{|\bar{b}|^2}+2\bar{a}\cdot\bar{b} = \cancel{|\bar{a}|^2}+\cancel{|\bar{b}|^2}-2\bar{a}\cdot\bar{b}$$

$$4\bar{a}\cdot\bar{b} = 0 \quad\Rightarrow\quad \bar{a}\perp\bar{b}.$$

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = 0$$

எ.கா: 8.15 எந்த ஒரு வெக்டர் $\bar{r}$க்கும் $\bar{r} = (\bar{r}\cdot\bar{i})\bar{i}+(\bar{r}\cdot\bar{j})\bar{j}+(\bar{r}\cdot\bar{k})\bar{k}$

வழிமுறை: $\bar{r} = x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$ எனக் கொள்க. $\quad \bar{i}\cdot\bar{j} = \bar{i}\cdot\bar{k} = 0.$

$\bar{r}\cdot\bar{i} = (x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k})\cdot\bar{i} = x.$

$(\bar{r}\cdot\bar{i})\bar{i} = x\bar{i}.$ இதேபோல் மற்றவை கொண்டு கூட்டவும்.

$\bar{r} = x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$ என்க. $\quad \bar{i}\cdot\bar{i}=1, \ \bar{i}\cdot\bar{j} = \bar{i}\cdot\bar{k} = 0.$

$\bar{r}\cdot\bar{i} = (x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k})\cdot\bar{i} = x.$

$(\bar{r}\cdot\bar{i})\bar{i} = x\bar{i}$

இதேபோல் $(\bar{r}\cdot\bar{j})\bar{j} = y\bar{j}, \ (\bar{r}\cdot\bar{k})\bar{k} = z\bar{k}$

$$\therefore (\bar{r}\cdot\bar{i})\bar{i}+(\bar{r}\cdot\bar{j})\bar{j}+(\bar{r}\cdot\bar{k})\bar{k} = x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k} = \bar{r}.$$

எ.கா: 8.16. $5\bar{i}+3\bar{j}+4\bar{k}, \ 6\bar{i}-8\bar{j}-\bar{k}$ என்ற வெக்டர்களின் இடைப்பட்ட கோணம் காண்க.

வழிமுறை: $\cos\theta = \dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$ என்ற சூத்திரம். $|\bar{a}|, |\bar{b}|, \bar{a}\cdot\bar{b}$ இவற்றை தனியாக கண்டு பிரதியிட்டால் $\cos\theta$ கிடைக்கும் இதிலிருந்து θ காணலாம். $\cos\theta$ –ve ஆக இருந்தால் π க்கு பதிலாக முறையே $\pi-\theta$ என கொள்க.

$$\cos\theta = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} \qquad \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{30-24-4}{\sqrt{50}\sqrt{101}} = \frac{2}{\sqrt{50}\sqrt{101}} = \frac{2}{5\sqrt{2}\sqrt{101}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{101}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{101}}\right)$$

எ.கா: 8.17 A, B, C, D ஆகியவை (4, −3, 0) (7, −5, −1) (−2, 1, 3) (0, 2, 5) என்ற புள்ளிகள் எனில் $\overline{CD}$ ன் மீது $\overline{AB}$ ன் வீழல் காண்க.

வழிமுறை: $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{OD}$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இதில் $\overline{AB}, \overline{CD}$ காண்க. $\overline{CD}$ ன் மீது $\overline{AB}$ ன் வீழல் $= \frac{\overline{CD}\cdot\overline{AB}}{|\overline{CD}|}$ பயன்படுத்து.

$\overline{OA} = 4i - 3j$ $\qquad \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$

$\overline{OB} = 7i - 5j - k$ $\qquad \overline{CD} = \overline{OD} - \overline{OC} = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$.

$\overline{OC} = -2i + j + 3k$

$\overline{OD} = 2j + 5k$ $\qquad \overline{CD}$ ன் மீது $\overline{AB}$ ன் வீழல் $\frac{\overline{CD}\cdot\overline{AB}}{|\overline{CD}|}$

$$= \frac{6-2-2}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{2}{3}.$$

எ.கா 8.18 $\bar{a}, \bar{b}$ மற்றும் $\bar{c}$ ஆகிய 3 அலகு வெக்டர்கள் $\bar{a} - \sqrt{3}\bar{b} + \bar{c} = 0$ என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்தால் $\bar{a}, \bar{c}$ க்கு இடைப்பட்ட கோணம் காண்க.

வழிமுறை $|\bar{a}| = 1 = |\bar{b}| = |\bar{c}|$ என்பதை தெரிந்து கொள். $\bar{a} - \sqrt{3}\bar{b} + \bar{c} = 0 \Rightarrow |\bar{a} + \bar{c}| = |\sqrt{3}\bar{b}|$. இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த விடை கிடைக்கும்.

$$|\bar{a}| = |\bar{b}| = |\bar{c}| = 1$$

$$\bar{a} - \sqrt{3}\bar{b} + \bar{c} = 0 \Rightarrow |\bar{a} + \bar{c}| = |\sqrt{3}\,\bar{b}|$$

$$|\bar{a} + \bar{c}|^2 = 3|\bar{b}|^2$$

$$|\bar{a}|^2 + |\bar{c}|^2 + 2|\bar{a}||\bar{c}|\cos\theta = 3|\bar{b}|^2$$

$$1 + 1 + 2\cdot1\cdot1\cdot\cos\theta = 3.$$

$$2\cos\theta = 3 - 2 = 1$$

$$\cos\theta = 1/2$$

$$\theta = \pi/3.$$

எ.கா: 8.19. $(4,-3,1)$ $(2,-4,5)$ $(1,-1,0)$ என்ற புள்ளிகளைக் கொண்டு அமையப் பெற்ற இரு செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கும் எனக்காட்டு.

வழிமுறை: $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{OD}$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ காண்க. இவ் வெக்டர்களின் கூடுதல் (பூஜ்ஜிய) காண்க. இரு பக்கங்களின் புள்ளிப் பெருக்கல் பூஜ்ஜியம் ஆக இருக்க வேண்டும். (அ). இரு வெக்டர்களின் புள்ளி பெருக்கல் பூஜ்ஜியம் ஆக வேண்டும்.

$\overline{OA} = 4\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$ $\quad \overline{AB} = \overline{OB}-\overline{OA} = -2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$

$\overline{OB} = 2\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}$ $\quad \overline{BC} = \overline{OC}-\overline{OB} = -\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}$

$\overline{OC} = \hat{i}-\hat{j}$ $\quad \overline{CA} = 3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$

$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0$ $\therefore$ இது ஒரு முக்கோணம்.

$$\overline{AB}\cdot\overline{CA} = -6+2+4=0$$

$$\therefore \angle A = 90^\circ.$$

$\therefore$ இது ஒரு செங்கோண முக்கோணம்.

1/8.3 கீழ்காணும் $\bar{a}, \bar{b}$ க்கு $\bar{a}\cdot\bar{b}$ காண்க.

1) $\bar{a} = \hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ $\quad \bar{b} = 3\hat{i}-4\hat{j}-2\hat{k}$

2) $\bar{a} = 2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ $\quad \bar{b} = 6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$.

1) $\bar{a} = \hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ $\quad \bar{a}\cdot\bar{b} = 3+8-2 = 9$

$\bar{b} = 3\hat{i}-4\hat{j}-2\hat{k}$

2) $\bar{a} = 2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ $\quad \bar{a}\cdot\bar{b} = 12-6-2 = 4.$

$\bar{b} = 6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$

2/8.3) கீழ்காணும் வெக்டர்கள் $\bar{a}, \bar{b}$ செங்குத்து எனில் λ ன் மதிப்பு காண்க.

1) $\bar{a} = 2\hat{i}+\lambda\hat{j}+\hat{k}$ மற்றும் $\bar{b} = \hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$

2) $\bar{a} = 2\hat{i}+4\hat{j}-\hat{k}$ மற்றும் $\bar{b} = 3\hat{i}-2\hat{j}+\lambda\hat{k}$

வழிமுறை: $\bar{a}, \bar{b}$ செங்குத்து எனில் $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$ எனக் கொள்க.

1) $\bar{a} = 2\hat{i}+\lambda\hat{j}+\hat{k}$ $\quad \bar{a}\cdot\bar{b} = 2-2\lambda+3=0$

$\bar{b} = \hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$ $\quad 2\lambda = 5$

$\lambda = 5/2$

2) $\bar{a} = 2\hat{i}+4\hat{j}-\hat{k}$ $\quad \bar{a}\cdot\bar{b} = 6-8-\lambda = 0$

$\bar{b} = 3\hat{i}-2\hat{j}+\lambda\hat{k}$ $\quad -2 = \lambda.$

$\frac{3}{8.3}$) $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகிய வெக்டர்கள் $|\vec{a}|=10$ 2) $|\vec{b}|=15$ மற்றும் $\vec{a}\cdot\vec{b}=75\sqrt{2}$ எனில் $\vec{a}, \vec{b}$ க்கு இடைப்பட்ட கோணத்தை காண்க.

வழிமுறை: $\vec{a}\cdot\vec{b}$ வரையறை எழுதி $\vec{a}\cdot\vec{b}=75\sqrt{2}$ எனக் கொண்டால் $\cos\theta$ கிடைக்கும்.

$|\vec{a}|=10 \quad |\vec{b}|=15 \quad \vec{a}\cdot\vec{b}=75\sqrt{2}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=75\sqrt{2}$$

$$10\times15\cdot\cos\theta=75\sqrt{2}$$

$$\cos\theta=\frac{75\sqrt{2}}{150\cdot 2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta=\pi/4.$$

$\frac{4}{8.3}$) கீழ்க்காணும் வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் காண்க.

1) $2\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k}$ மற்றும் $6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$.

2) $\hat{i}-\hat{j}$ மற்றும் $\hat{j}-\hat{k}$.

வழிமுறை: $\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ பயன்படுத்து. $\cos\theta = -$ எனில் θ II கால்பகுதியில் அமையும்.

1) $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k} \qquad |\vec{a}|=\sqrt{4+9+36}=7$

$\vec{b}=6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k} \qquad |\vec{b}|=\sqrt{36+9+4}=7$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=12-9-12=-9.$$

$$\cos\theta=\frac{-9}{7}\Rightarrow\theta=\cos^{-1}(-9/7)$$

2) $\vec{a}=\hat{i}-\hat{j} \qquad |\vec{a}|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$\vec{b} \quad \hat{j}-\hat{k} \qquad |\vec{b}|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1. \qquad \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$$

θ, II கால்பகுதியில் அமையும்.

$$\theta=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}.$$

$\frac{5}{8.3}$) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ எனும் 3 வெக்டர்களுக்கு $\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, $|\vec{a}|=3$ $|\vec{b}|=4$ $|\vec{c}|=7$ எனில் $\vec{a}, \vec{b}$ க்கு இடைப்பட்ட கோணத்தை காண்க.

வழிமுறை: $\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}=0 \Rightarrow |\vec{a}+2\vec{b}|^2=|-\vec{c}|^2$ எனத் தொடர்ந்து மதிப்புகளை பிரதியிட $\cos\theta$ கிடைக்கும்.

- $\bar{a}+2\bar{b}+\bar{c}=0 \Rightarrow \bar{a}+2\bar{b}=-\bar{c}$

$$|\bar{a}+2\bar{b}|^2 = |-\bar{c}|^2$$

$$|\bar{a}|^2+4|\bar{b}|^2+4\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{c}|^2$$

$$9+64+4|\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta = 49.$$

$$73+4\cdot 3\cdot 4\cdot \cos\theta = 49.$$

$$48\cos\theta = -24$$

$$\cos\theta = -\frac{24}{48} = -1/2$$

θ, II கால்பகுதியில் அமையும் $\theta = \pi - \pi/3$

$= 2\pi/3.$

---

6 / 8.3. $\bar{a}=2i+3j+6k,\ \bar{b}=6i+2j-3k,\ \bar{c}=3i-6j+2k)$ ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து என நிறுவுக.

வழிமுறை: இரண்டு, இரண்டு வெக்டர்களுக்கு . பெருக்கம் போடவும் அது 0 வந்தால் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகும்.

$\bar{a}=2i+3j+6k \qquad \bar{a}\cdot\bar{b} = 12+6-18=0$

$\bar{b}=6i+2j-3k \qquad \bar{b}\cdot\bar{c} = 18-12-6=0$

$\bar{c}=3i-6j+2k \qquad \bar{c}\cdot\bar{a} = 6-18+12=0$

$\therefore \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகும்.

---

7 / 8.3. $-i-2j-6k,\ 2i-j+k,\ -i+3j+5k$ ஆகிய வெக்டர்கள் செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கும் எனக் காட்டு.

வழிமுறை: முதலில் மூன்று வெக்டர்களின் கூடுதல் 0 வரவேண்டும். அவ்வாறு வந்தால் அது ஒரு முக்கோணம் ஆகும். பிறகு ஏதாவது இரு வெக்டர்களின் . பெருக்கம் 0 வந்தால் அது செங்கோணம் ஆகும்.

$\bar{a}=-i-2j-6k \qquad \bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=0$, $\therefore$ இது ஒரு முக்கோணம்

$\bar{b}=2i-j+k \qquad \bar{a}\cdot\bar{b} = -2+2-6 \neq 0$

$\bar{c}=-i+3j+5k \qquad \bar{b}\cdot\bar{c} = -2-3+5=0.$

$\therefore \bar{b}\perp\bar{c}.$

$\therefore$ இது ஒரு செங்கோண முக்கோணம் ஆகும்.

$\frac{8}{8.3}$) $|\bar{a}|=5$, $|\bar{b}|=6$, $|\bar{c}|=7$ மற்றும் $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=0$ எனில் $\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}\cdot\bar{c}+\bar{c}\cdot\bar{a}$ காண்க.

வழிமுறை: $|\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}|^2=0$ எனக் கொள்க. விரிவுபடுத்தி மதிப்புகளை பிரதியிடவும்.

$$|\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}|^2=|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2+|\bar{c}|^2+2(\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}\cdot\bar{c}+\bar{c}\cdot\bar{a})=0$$
$$25+36+49+2(\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}\cdot\bar{c}+\bar{c}\cdot\bar{a})=0$$
$$2(\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}\cdot\bar{c}+\bar{c}\cdot\bar{a})=-110$$
$$\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}\cdot\bar{c}+\bar{c}\cdot\bar{a}=-55$$

$\frac{9}{8.3}$) $(2,-1,3)$ $(4,3,1)$ $(3,1,2)$ ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே கோட்டமைவு புள்ளிகள் எனக் காட்டுக.

வழிமுறை: கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளை இணைத்து கொண்டு கோட்டு வெக்டர்கள் உருவாக்க வேண்டும். $\bar{AB}=t\,\bar{BC}$ எனில் மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே கோட்டமைவன ஆகும்.

$\bar{OA}=2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$

$\bar{OB}=4\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$

$\bar{OC}=3\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$

$\bar{AB}=\bar{OB}-\bar{OA}=2\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k}$

$\bar{BC}=\bar{OC}-\bar{OB}=-\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$

$\bar{AB}=-2(-\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})$

$\bar{AB}=-2\,\bar{BC}$

$\therefore$ மூன்று புள்ளிகள் ஒரே கோட்டமைவன.

$\frac{10}{8.3}$) $\bar{a},\bar{b}$ ஆகியவை அலகு வெக்டர்கள் மற்றும் θ அவற்றுக்கிடைப்பட்ட கோணம் எனில் 1) $\sin\theta/2=\frac{1}{2}|\bar{a}-\bar{b}|$ 2) $\cos\theta/2=\frac{1}{2}|\bar{a}+\bar{b}|$ 3) $\tan\theta/2=\frac{|\bar{a}-\bar{b}|}{|\bar{a}+\bar{b}|}$ எனநிறுவுக.

வழிமுறை: $|\bar{a}+\bar{b}|^2$, $|\bar{a}-\bar{b}|^2$ காண வேண்டும். $|\bar{a}|=1$, $|\bar{b}|=1$ எனக் கொள்க மற்றும் $1-\cos\theta=2\sin^2\theta/2$, $1+\cos\theta=2\cos^2\theta/2$ பயன்படுத்த வேண்டும்.

$$|\bar{a}+\bar{b}|^2=|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2+2\bar{a}\cdot\bar{b}$$
$$=1+1+2|\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta$$
$$=2+2\cdot1\cdot1\cdot\cos\theta$$
$$=2(1+\cos\theta)$$
$$=2\cdot2\cos^2\theta/2$$
$$|\bar{a}+\bar{b}|=2\cos\theta/2 \Rightarrow \frac{1}{2}|\bar{a}+\bar{b}|=\cos\theta/2 \quad (1)$$

$$|\bar{a}-\bar{b}|^2=|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2-2\bar{a}\cdot\bar{b}$$
$$=1+1-2|\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta$$
$$=2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos\theta$$
$$=2(1-\cos\theta)$$
$$=2\cdot2\sin^2\theta/2$$
$$|\bar{a}-\bar{b}|=2\sin\theta/2 \quad (2)$$
$$\frac{1}{2}|\bar{a}-\bar{b}|=\sin\theta/2$$

$\frac{(2)}{(1)}$, $\frac{\cancel{\frac{1}{2}}|\bar{a}-\bar{b}|}{\cancel{\frac{1}{2}}|\bar{a}+\bar{b}|} = \frac{\sin\theta/2}{\cos\theta/2}$

$$\frac{|\bar{a}-\bar{b}|}{|\bar{a}+\bar{b}|} = \tan\theta/2$$

$\frac{11}{8.3}$) $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ என்ற 3 வெக்டர்கள் $|\bar{a}|=3$ $|\bar{b}|=4$ $|\bar{c}|=5$ மேலும் ஒவ்வொரு வெக்டரும் பிற வெக்டர்களின் கூடுதலுக்கு செங்குத்தாக அமைந்தால் $|\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}|$ காண்க.

வழிமுறை: $\bar{a}\cdot(\bar{b}+c)=0$, $\bar{b}\cdot(\bar{c}+a)=0$, $\bar{c}\cdot(\bar{a}+\bar{b})=0$. $|\bar{a}|=3, |\bar{b}|=4, |\bar{c}|=5$.

$(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})^2 = |\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2+|\bar{c}|^2+2(\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}\cdot\bar{c}+\bar{c}\cdot\bar{a})$ பயன்படுத்து.

$\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c})=0$	$\bar{b}\cdot(\bar{c}+\bar{a})=0$	$\bar{c}\cdot(\bar{a}+\bar{b})=0$
$\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}=0$	$\bar{b}\cdot\bar{c}+\bar{b}\cdot\bar{a}=0$	$\bar{c}\cdot\bar{a}+\bar{c}\cdot\bar{b}=0.$

கொடுப்பது $|\bar{a}|=3$ $|\bar{b}|=4$ $|\bar{c}|=5$.

$$|\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}|^2 = |\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2+|\bar{c}|^2+2(\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}\cdot\bar{c}+\bar{c}\cdot\bar{a})$$
$$= 9+16+25+2(0)$$
$$= 50 = 25\times 2$$
$$|\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}| = 5\sqrt{2}$$

$\frac{12}{8.3}$) $2\bar{i}+6\bar{j}+3\bar{k}$ ன் மீது $\bar{i}+3\bar{j}+7\bar{k}$ ன் வீழலைக் காண்க.

வழிமுறை: $\bar{a}$ ன் மீது $\bar{b}$ ன் வீழல் $\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|}$ பயன்படுத்தவும்.

$\bar{a} = 2\bar{i}+6\bar{j}+3\bar{k}$ $\quad \bar{a}\cdot\bar{b} = 2+18+21 = 41$

$\bar{b} = \bar{i}+3\bar{j}+7\bar{k}$ $\quad |\bar{a}| = \sqrt{4+36+9} = 7$

$\bar{a}$ ன் மீது $\bar{b}$ ன் வீழல் $= \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|} = \frac{41}{7}.$

$\frac{13}{8.3}$) $\bar{b} = 2\bar{i}+6\bar{j}+3\bar{k}$ ன் மீது $\bar{a} = \lambda\bar{i}+\bar{j}+4\bar{k}$ ன் வீழல் 4 எனில் λ ன் மதிப்பைக் காண்க.

வழிமுறை: $\bar{b}$ ன் மீது $\bar{a}$ ன் வீழல் $= \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|} = 4$ எனக.

$\bar{b} = 2\bar{i}+6\bar{j}+3\bar{k}$ $\quad \bar{b}\cdot\bar{a} = 2\lambda+6+12$

$\bar{a} = \lambda\bar{i}+\bar{j}+4\bar{k}$ $\quad |\bar{b}| = \sqrt{4+36+9} = 7$

$\bar{b}$ ன் மீது $\bar{a}$ ன் வீழல் $\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{2\lambda+18}{7} = 4 \Rightarrow 2\lambda+18=28$

$2\lambda=10 \quad \lambda=5.$

14) $\bar a, \bar b, \bar c$ என்ற மூன்று வெக்டர்கள் $|\bar a|=2$, $|\bar b|=3$, $|\bar c|=4$ மற்றும் $\bar a+\bar b+\bar c=0$ எனில் $4\bar a\cdot\bar b+3\bar b\cdot\bar c+3\bar c\cdot\bar a$ காண்க.

வழிமுறை: $\bar a+\bar b+\bar c=0$ எனில்

$\bar a+\bar b=-\bar c$, $\bar a+\bar c=-\bar b$, $\bar b+\bar c=-\bar a$ என எழுதிக் கொள்ளவும்.

[illegible] $\bar a\cdot\bar b$, $\bar b\cdot\bar c$, $\bar c\cdot\bar a$ [illegible] மதிப்புகளை [illegible].

$\lvert\bar a+\bar b\rvert=\lvert-\bar c\rvert$	$\lvert\bar a+\bar c\rvert^2=\lvert\bar b\rvert^2$	$\lvert\bar b+\bar c\rvert^2=\lvert\bar a\rvert^2$
$\lvert\bar a+\bar b\rvert^2=\lvert\bar c\rvert^2$	$\lvert\bar a\rvert^2+\lvert\bar c\rvert^2+2\bar a\cdot\bar c=\lvert\bar b\rvert^2$	$\lvert\bar b\rvert^2+\lvert\bar c\rvert^2+2\bar b\cdot\bar c=\lvert\bar a\rvert^2$
$\lvert\bar a\rvert^2+\lvert\bar b\rvert^2+2\bar a\cdot\bar b=\lvert\bar c\rvert^2$	$4+16+2\bar a\cdot\bar c=9$	$9+16+2\bar b\cdot\bar c=4$
$4+9+2\,\bar a\cdot\bar b=16$	$2\bar a\cdot\bar c=-11$	$2\bar b\cdot\bar c=-21$
$2\bar a\cdot\bar b=3$	$\bar a\cdot\bar c=-\frac{11}{2}$	$\bar b\cdot\bar c=-\frac{21}{2}$
$\bar a\cdot\bar b=3/2$		

$\therefore 4\bar a\cdot\bar b+3\bar b\cdot\bar c+3\bar c\cdot\bar a$

$=4\cdot\frac{3}{2}+3\left(-\frac{21}{2}\right)+3\left(-\frac{11}{2}\right)$

$=\frac{12-63-33}{2}=-42$

பயிற்சி - 8.4

எ.கா: 8.20: $\bar a=3i+4j$, $\bar b=i+j+k$ எனில் $|\bar a\times\bar b|$ காண்க.

வழிமுறை: X பெருக்கலை பயன்படுத்தி கொடுக்கப்பட்ட [illegible]

$$\begin{vmatrix} i & j & k\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}$$

R_1ல் i, j, k

R_2ல் முதல் வெக்டரின் கூறுகள்

R_3ல் இரண்டாவது வெக்டரின் கூறுகள்

[illegible] மதிப்புகளை [illegible].

$i(b_1c_2-b_2c_1)-j(a_1c_2-a_2c_1)+k(a_1b_2-a_2b_1)$

(அல்லது) $\begin{matrix} b_1 & c_1 & a_1 & b_1\\ b_2 & c_2 & a_2 & b_2\end{matrix}$ என எழுதிக் கொண்டு

$=i(b_1c_2-b_2c_1)+j(c_1a_2-c_2a_1)+k(a_1b_2-a_2b_1)$

[illegible]

$\bar a=3i+4j$

$\bar b=i+j+k$

$$\bar a\times\bar b=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 3 & 4 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=i(4)-j(3)+k(3-4)$$

$=4i-3j-k$

$|\bar a\times\bar b|=\sqrt{16+9+1}=\sqrt{26}$.

எ.கா. 8.21. $\bar{a} = -3\hat{i}+4\hat{j}-7\hat{k}$ மற்றும் $\bar{b} = 6\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ எனில் கீழ்க்காணுவற்றை சரிபார்க்க.

1) $\bar{a}$ மற்றும் $\bar{a}\times\bar{b}$ ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து.

2) $\bar{b}$ மற்றும் $\bar{a}\times\bar{b}$ ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து.

வழிமுறை: முதலில் $\bar{a}\times\bar{b}$ காண வேண்டும் பிறகு $\bar{a}\cdot(\bar{a}\times\bar{b})$ மற்றும் $\bar{b}\cdot(\bar{a}\times\bar{b})$ காண வேண்டும்.

$\bar{a} = -3\hat{i}+4\hat{j}-7\hat{k}$

$\bar{b} = 6\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$.

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 4 & -7 \\ 6 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \hat{i}(-12+14)-\hat{j}(9+42)+\hat{k}(-6-24)$$
$$= 2\hat{i}-51\hat{j}-30\hat{k}$$

$\bar{a}\cdot(\bar{a}\times\bar{b}) = -6-204+210 = 0 \quad \therefore \bar{a}, \bar{a}\times\bar{b}$ செங்குத்து

$\bar{b}\cdot(\bar{a}\times\bar{b}) = 12-102+90 = 0 \quad \therefore \bar{b}, \bar{a}\times\bar{b}$ செங்குத்து

எ.கா. 8.22: $\bar{a} = 4\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$, $\bar{b} = -2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ எனில் இரு வெக்டர்களுக்கும் செங்குத்தான 6 அலகு வெக்டர் காண்க.

வழிமுறை $6\hat{n} = \pm 6\dfrac{\bar{a}\times\bar{b}}{|\bar{a}\times\bar{b}|}$ சூத்திரத்தை பயன்படுத்து. இங்கு $\hat{n}$ என்பது $\bar{a}, \bar{b}$ செங்குத்தான ஓரலகு வெக்டர்.

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \hat{i}(2-3)-\hat{j}(-8+6)+\hat{k}(4-2)$$
$$= -\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$$

$|\bar{a}\times\bar{b}| = \sqrt{1+4+4} = 3$

$$\hat{n} = \pm\frac{-\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}}{3}$$

$$6\hat{n} = \pm \cancel{6}^{2}\left[\frac{-\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}}{\cancel{3}}\right]$$

எ.கா: 8.23: $\bar{a} = 2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ மற்றும் $\bar{b} = 4\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$ ஆகியவைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தின் சைன் மற்றும் கொசைன் மதிப்பு காண்க.

வழிமுறை: $\cos\theta = \dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$, $\sin\theta = \dfrac{|\bar{a}\times\bar{b}|}{|\bar{a}||\bar{b}|}$ பயன்படுத்து.

$|\bar{a}| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$ $\quad \bar{a}\cdot\bar{b} = 8-2+6 = 12$

$|\bar{b}| = \sqrt{16+4+4} = \sqrt{24}$

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 8i + 8j - 8k$$

$$|\bar{a}\times\bar{b}| = \sqrt{3\times 8^2} = 8\sqrt{3}.$$

$$\cos\theta = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{12}{\sqrt{14}\,\sqrt{24}} = \frac{12}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{6}} = \frac{12\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{7}\cdot 4\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{7}}.$$

$$\sin\theta = \frac{|\bar{a}\times\bar{b}|}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{14}\,\sqrt{24}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}\sqrt{12}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}\cdot 2\times\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

எ.கா: 24) $\bar{a} = 3i + j + 4\bar{k}$, $\bar{b} = i - j + \bar{k}$ ஆகியவற்றை அடுத்தடுத்த பக்கங்களாகக் கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்பு காண்க.

வழிமுறை: இணைகரத்தின் பரப்பு = $|\bar{a}\times\bar{b}|$,

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & \bar{k} \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = i(1+4) - j(3-4) + \bar{k}(-3-1)$$

$$= 5i + j - 4\bar{k}.$$

$$|\bar{a}\times\bar{b}| = \sqrt{25+1+16} = \sqrt{42} \text{ ச.அ.}$$

எ.கா: 25: $\bar{a}, \bar{b}$ ஏதேனும் இரு வெக்டர்கள் எனில் $|\bar{a}\times\bar{b}|^2 + (\bar{a}\cdot\bar{b})^2 = |\bar{a}|^2|\bar{b}|^2$ எனக் காட்டுக.

வழிமுறை: வரையறையின்படி $|\bar{a}\times\bar{b}|^2, (\bar{a}\cdot\bar{b})^2$ ஆகியவற்றைக் கண்டு கூட்டவும்.

$$|\bar{a}\times\bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\theta \qquad \bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta$$

$$|\bar{a}\times\bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2|\bar{b}|^2\sin^2\theta \qquad (\bar{a}\cdot\bar{b})^2 = |\bar{a}|^2|\bar{b}|^2\cos^2\theta$$

$$\therefore |\bar{a}\times\bar{b}|^2 + (\bar{a}\cdot\bar{b})^2 = |\bar{a}|^2|\bar{b}|^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$= |\bar{a}|^2|\bar{b}|^2$$

எ.கா: 26. A(1,0,0) B(0,1,0) C(0,0,1) ஆகியவற்றை முனைப்புள்ளிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு காண்க.

வழிமுறை: முக்கோணத்தின் பரப்பு $\frac{1}{2}|\bar{AB}\times\bar{AC}|$ பயன்படுத்தவும்.

$\bar{OA} = i$ $\qquad \bar{AB} = \bar{OB} - \bar{OA} = -i + j$

$\bar{OB} = j$

$\bar{OC} = \bar{k}$ $\qquad \bar{AC} = \bar{OC} - \bar{OA} = -i + \bar{k}.$

$$\bar{AB}\times\bar{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i(1) - j(-1) + \bar{k}(1)$$

$$= i + j + \bar{k}.$$

$$|\bar{AB}\times\bar{AC}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

• முக்கோணத்தின் பரப்பு: $\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|$

$= \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ச.அ.

$\frac{1}{8.4}$) $\bar a = 2\hat i+\hat j+3\hat k$, $\bar b = 3\hat i+5\hat j-2\hat k$, $\bar a\times\bar b$ மதிப்பு காண்க.

வழிமுறை: $\bar a\times\bar b$ = அணிக்கோவை வழியில் எடுத்து மதிப்பு காண்க.

$$\bar a\times\bar b = \begin{vmatrix} \hat i & \hat j & \hat k \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = \hat i(-2-15)-\hat j(-4-9)+\hat k(10-3)$$

$$= -17\hat i+13\hat j+7\hat k.$$

$\frac{2}{8.4}$) P.T. $\bar a\times(\bar b+\bar c)+\bar b\times(\bar c+\bar a)+\bar c\times(\bar a+\bar b)=0$ எனக் காட்டுக.

வழிமுறை: பங்கீட்டு விதியை பயன்படுத்து அதாவது சாதாரண அல்ஜீப்ராவில் பெருக்குவது போல் பெருக்குக.

முதல் 3 அப்படியேவைத்துக் கொண்டு அடுத்த மூன்றையும் இடம் மாற்றம் செய்து குறி மாற்றிக்கொள்ள விடை கிடைக்கும்.

LHS $\bar a\times(\bar b+\bar c)+\bar b\times(\bar c+\bar a)+\bar c\times(\bar a+\bar b)$

$= \bar a\times\bar b+\bar a\times\bar c+\bar b\times\bar c+\bar b\times\bar a+\bar c\times\bar a+\bar c\times\bar b$

$= \bar a\times\bar b+\bar a\times\bar c+\bar b\times\bar c-\bar a\times\bar b-\bar a\times\bar c-\bar b\times\bar c$

$= 0.$

$\frac{4}{8.4}$) $\bar a = \hat i+\hat j+\hat k$, $\bar b = \hat i+2\hat j+3\hat k$ எனில் $\bar a+\bar b$, $\bar a-\bar b$ ஆகியவற்றுக்கு தனித்தனியாக செங்குத்தாக உள்ள வெக்டர்களை காண்க.

வழிமுறை: $\bar a+\bar b$, $\bar a-\bar b$ தனித்தனியாக கொண்டு இவைகளுக்கு செங்குத்தான வெக்டர் காண்க. $\hat n = \pm\frac{\bar c\times\bar d}{|\bar c\times\bar d|}$ பயன்படுத்து.

$\bar c = \bar a+\bar b = 2\hat i+3\hat j+4\hat k$

$\bar d = \bar a-\bar b = -\hat j-2\hat k$

$$\bar c\times\bar d = \begin{vmatrix} \hat i & \hat j & \hat k \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \hat i(-6+4)-\hat j(-4)+\hat k(-2)$$

$$= -2\hat i+4\hat j-2\hat k$$

$|\bar c\times\bar d| = 2\sqrt{1+4+1} = 2\sqrt6$

$$\hat n = \pm\frac{\bar c\times\bar d}{|\bar c\times\bar d|} = \pm\frac{-\cancel{2}(\hat i-2\hat j+\hat k)}{\cancel{2}\sqrt6} = \frac{\pm\hat i-2\hat j+\hat k}{6}.$$

$\frac{3}{8.4}$. $\hat{i}+2\hat{j}+\bar{k}$ மற்றும் $\hat{i}+3\hat{j}+4\bar{k}$ என்பவைகளுக்கு செங்குத்தானதும் எண்ணளவு $10\sqrt{3}$ என்னுமாறு உள்ள வெக்டர்களைக் காண்க.

வழிமுறை: $\bar{a}\times\bar{b}$, $|\bar{a}\times\bar{b}|$ காண்க. $10\sqrt{3}\,\hat{n}$ காண்க. $\hat{n}=\pm\frac{\bar{a}\times\bar{b}}{|\bar{a}\times\bar{b}|}$

$\bar{a}=\hat{i}+2\hat{j}+\bar{k}$ $\quad\bar{b}=\hat{i}+3\hat{j}+4\bar{k}$

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4\end{vmatrix}=i(8-3)-j(4-1)+k(3-2)$$
$$=5\bar{i}-3\bar{j}+\bar{k}$$
$$|\bar{a}\times\bar{b}|=\sqrt{25+9+1}=\sqrt{35}$$
$$\hat{n}=\pm\frac{\bar{a}\times\bar{b}}{|\bar{a}\times\bar{b}|}=\pm\frac{5\bar{i}-3\bar{j}+\bar{k}}{\sqrt{35}}$$
$$10\sqrt{3}\,\hat{n}=\pm10\sqrt{3}\left(\frac{5\bar{i}-3\bar{j}+\bar{k}}{\sqrt{35}}\right)$$

$\frac{5}{8.6}$) $\hat{i}+2\hat{j}+3\bar{k}$ மற்றும் $3\bar{i}-2\hat{j}+\bar{k}$ ஆகியவற்றை அடுத்தடுத்த பக்கங்களாகக் கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்பு காண்க.

வழிமுறை: $|\bar{a}\times\bar{b}|$ காண்க.

$\bar{a}=\hat{i}+2\hat{j}+3\bar{k}$, $\bar{b}=3\hat{i}-2\hat{j}+\bar{k}$

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix}=i(2+6)-j(1-9)+k(-2-6)$$
$$=8\hat{i}+8\hat{j}-8\bar{k}$$
$$=8(\hat{i}+\hat{j}-\bar{k})$$
$$|\bar{a}\times\bar{b}|=8\sqrt{1+1+1}=8\sqrt{3}\text{ ச.அ.}$$

$\frac{6}{8.4}$) A(3, −1, 2) B(1, −1, −3) C(4, −3, 1) ஆகியவற்றை முனைகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு காண்க.

வழிமுறை: கொடுக்கப்பட்டவை $\bar{OA}, \bar{OB}, \bar{OC}$. இவற்றிலிருந்து $\bar{AB}, \bar{AC}$ காண்க.
முக்கோணத்தின் பரப்பு: $\frac{1}{2}|\bar{AB}\times\bar{AC}|$.

$\bar{OA}=3\hat{i}-\hat{j}+2\bar{k}$ $\qquad \bar{AB}=\bar{OB}-\bar{OA}=-2\hat{i}-5\bar{k}$

$\bar{OB}=\hat{i}-\hat{j}-3\bar{k}$ $\qquad \bar{AC}=\bar{OC}-\bar{OA}=\hat{i}-2\hat{j}-\bar{k}$

$\bar{OC}=4\hat{i}-3\hat{j}+\bar{k}$

$$\bar{AB}\times\bar{AC}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & -1\end{vmatrix}=\bar{i}(-10)-j(2+5)+k(4)$$
$$=-10\hat{i}-7\hat{j}+4\bar{k}$$

$|\bar{AB}\times\bar{AC}|=\sqrt{100+49+16}=\sqrt{165}$

முக்கோணத்தின் பரப்பு $=\frac{1}{2}|\bar{AB}\times\bar{AC}|$
$=\frac{1}{2}\sqrt{165}$ ச.அ.

$\frac{7}{8.4}$) முக்கோணம் ABC யின் உச்சிகள் A, B, C ன் நிலை வெக்டர்கள் $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ எனில் முக்கோணம் ABC யின் பரப்பு $= \frac{1}{2}|\bar{a}\times\bar{b}+\bar{b}\times\bar{c}+\bar{c}\times\bar{a}|$ என நிறுவுக. மேலும் A, B, C ஒரே கோட்டிலமைய கட்டுப்பாட்டைப் பெறுக.

வழிமுறை: $\overline{OA}=\bar{a}, \overline{OB}=\bar{b}, \overline{OC}=\bar{c}$. அறிந்து $\overline{AB}, \overline{AC}$ காண்க. முக்கோணத்தின் பரப்பு $= \frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}|$ காண்க. × வெக்டர் பெருக்கல் செய்யும்போது அணிக்கோவையோ பங்கீட்டு விதிமுறையோ i, j, k கொண்டு பெருக்கல் அணிக்கோவை மூலமும்.

$\overline{OA}=\bar{a}, \quad \overline{OB}=\bar{b} \quad \overline{OC}=\bar{c}$

$\overline{AB} = \overline{OB}-\overline{OA} = \bar{b}-\bar{a}$

$\overline{AC} = \overline{OC}-\overline{OA} = \bar{c}-\bar{a}$.

$\overline{AB}\times\overline{AC} = (\bar{b}-\bar{a})\times(\bar{c}-\bar{a})$

$= \bar{b}\times\bar{c}-\bar{b}\times\bar{a}-\bar{a}\times\bar{c}+\cancel{\bar{a}\times\bar{a}}^{\,0}$

முக்கோணத்தின் பரப்பு $= \bar{a}\times\bar{b}+\bar{b}\times\bar{c}+\bar{c}\times\bar{a}$

$\frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}| = \frac{1}{2}|\bar{a}\times\bar{b}+\bar{b}\times\bar{c}+\bar{c}\times\bar{a}|$.

A, B, C ஒரே கோட்டில் அமைய முக்கோணத்தின் பரப்பு 0

$\therefore \frac{1}{2}|\bar{a}\times\bar{b}+\bar{b}\times\bar{c}+\bar{c}\times\bar{a}|=0$

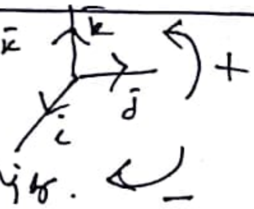
$|\bar{a}\times\bar{b}+\bar{b}\times\bar{c}+\bar{c}\times\bar{a}|=0$.

$\frac{8}{8.4}$) எந்த ஒரு வெக்டர் $\bar{a}$ க்கும் $|\bar{a}\times i|^2+|\bar{a}\times j|^2+|\bar{a}\times k|^2=2|\bar{a}|^2$ என நிறுவுக.

வழிமுறை: $\bar{a}=xi+yj+zk$ என்க. $i\times i=j\times j=k\times k=0$.

$i\times j=+k, \ j\times k=i, \ k\times i=j$

$j\times i=-k \quad k\times j=-i, \ i\times k=-j$ பயன்படுத்த விடை கிடைக்கும்.



$\bar{a}=xi+yj+zk \Rightarrow |\bar{a}|^2=x^2+y^2+z^2$.

$\bar{a}\times i=(xi+yj+zk)\times i$

$= -yk+zj \qquad |\bar{a}\times i|^2=y^2+z^2$ —— (1)

$(\bar{a}\times j)=(xi+yj+zk)\times j$

$= xk-zk \qquad |\bar{a}\times j|^2=x^2+z^2$ —— (2)

$\bar{a}\times k=(xi+yj+zk)\,k = -xj+yi$

$|\bar{a}\times j|^2=x^2+y^2$ —— (3)

$|\bar{a}\times i|^2+|\bar{a}\times j|^2+|\bar{a}\times k|^2 = 2x^2+2y^2+2z^2$

$= 2(x^2+y^2+z^2) = 2|\bar{a}|^2$.

10) $2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ மற்றும் $\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ ஆகிய வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தை வெக்டர் பெருக்கத்தை பயன்படுத்திக் காண்க.

தீர்வு: $\sin\theta = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ பயன்படுத்து.

$\vec{a} = 2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ $\quad |\vec{a}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

$\vec{b} = \hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ $\quad |\vec{b}| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}(1+2)-\hat{j}(2+1)+\hat{k}(4-1)$$
$$= 3\hat{i}-3\hat{j}+3\hat{k} = 3(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = 3\sqrt{1+1+1} = 3\sqrt{3}$$

$$\sin\theta = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{6}2} \qquad \theta = \pi/3.$$

11) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ என்பன அலகு வெக்டர்கள் $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c} = 0$ மேலும் $\vec{b}, \vec{c}$ க்கு இடைப்பட்ட கோணம் $\pi/3$ எனில் $\vec{a} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}(\vec{b}\times\vec{c})$ எனநிறுவுக.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$

$\vec{a}\cdot\vec{c} = 0 \Rightarrow \vec{a}\perp\vec{c}$

$\Rightarrow \vec{b}\parallel\vec{c}$ எனில் $\vec{b}, \vec{c}$ க்கு இடைப்பட்ட கோணம் $\pi/3$ இருக்க வாய்ப்பில்லை.

$$|\vec{b}\times\vec{c}| = |\vec{b}||\vec{c}|\sin\frac{\pi}{3} \qquad |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$
$$= 1\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

RHS: $\left|\frac{2}{\sqrt{3}}\vec{b}\times\vec{c}\right|^2 = \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4} = 1 = |\vec{a}|^2$

$$|\vec{a}|^2 = \left|\frac{2}{\sqrt{3}}\vec{b}\times\vec{c}\right|^2$$
$$\vec{a} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}\vec{b}\times\vec{c}$$

T. G. Venkatesan
9444209677

பயிற்சி - 8.5 (1 மதிப்பெண்)

1) $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}$ என்பது

1) $\overline{AD}$ 2) $\overline{CA}$ 3) $\overline{0}$ 4) $-\overline{AD}$.

பலகோணவிதிப்படி ஆரம்பபுள்ளியும் முடிவுப்புள்ளியும் ஒன்றேஎனில் $\overline{AA}=\overline{0}$. இடையில் தொடர்ச்சியாக இருக்கவேண்டும். மேலும் கடைசியில் $\overline{DA}$ இடமாற்றம் செய்யவேண்டும்.

2) $\bar{a}+2\bar{b}$ மற்றும் $3\bar{a}+m\bar{b}$ இணை எனில் m மதிப்பு

1) 3 2) $1/3$ 3) 6, 4) $1/6$.

இணை எனில் $\frac{1}{3}=\frac{2}{m} \Rightarrow m=6$. ஒத்தவெக்டர்களின் கெழுக்களின் விகிதம் சமம்.

3) $\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ மற்றும் $\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ ஆகிய வெக்டர்களின் கூடுதலுக்கு இணையாக உள்ள அலகுவெக்டர்.

1) $\frac{\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{5}}$ 2) $\frac{2\hat{i}+\hat{j}}{\sqrt{5}}$ 3) $\frac{2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{5}}$ 4) $\frac{2\hat{i}-\hat{j}}{\sqrt{5}}$

$\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}$ $2\hat{i}-\hat{j}$ $|\bar{c}|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$

$$\hat{c}=\frac{\bar{c}}{|\bar{c}|}=\frac{2\hat{i}-\hat{j}}{\sqrt{5}}$$

4) ஒரு வெக்டர் $\overline{OP}$ ஆனது x மற்றும் y அச்சின் மிகைத்திசையில் 60° மற்றும் 45° ஐ ஏற்படுத்தினால் $\overline{OP}$ ஆனது z அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் கோணம்.

1) 45° 2) 60° 3) 90° 4) 30°

$\alpha=60^\circ, \beta=45^\circ$ $\gamma=?$

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \Rightarrow \cos^2 60+\cos^2 45+\cos^2\gamma=1$.

$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\cos^2\gamma=1$

$\cos^2\gamma=1-\frac{3}{4}$

$=1/4$

$\Rightarrow \gamma=\pi/3$ $\cos\gamma=1/2$

5) $\overline{BA}=3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ மற்றும் B-ன் நிலைவெக்டர் $\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$ எனில் A-ன் நிலைவெக்டர்.

1) $4\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ 2) $4\hat{i}+5\hat{j}$ 3) $4\hat{i}$ 4) $-4\hat{i}$.

$\overline{BA}=\overline{OA}-\overline{OB}$

$\Rightarrow \overline{OA}=\overline{BA}+\overline{OB}=4\hat{i}+5\hat{j}$

6) ஒரு வெக்டர் ஆய அச்சுகளுடன் சம கோணங்களை ஏற்படுத்தினால் அக்கோணம் 1) $\cos^{-1}(1/3)$ 2) $\cos^{-1}(2/3)$ 3) $\cos^{-1}(1/\sqrt{3})$ 4) $\cos^{-1}(2/\sqrt{3})$

$\alpha = \beta = \gamma$ ∴ $\cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$3\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{3}$

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\alpha = \cos^{-1}(1/\sqrt{3})$

7) $\vec{a}-\vec{b}, \vec{b}-\vec{c}, \vec{c}-\vec{a}$ ஆகிய வெக்டர்கள்

1) ஒன்றுக்கொன்று இணையானவை 2) அலகு வெக்டர்கள்

3) செங்குத்தான வெக்டர்கள் 4) ஒரு தள வெக்டர்கள்.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(1) - 1(1)$$

$= 0$ ∴ ஒருதள வெக்டர்கள்.

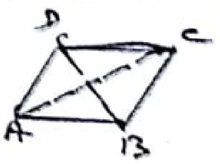
8) ABCD ஓர் இணைகரம் எனில் $\vec{AB}+\vec{AD}+\vec{CB}+\vec{CD}$ என்பது.

1) $2(\vec{AB}+\vec{AD})$ 2) $4\vec{AC}$ 3) $4\vec{BD}$ 4) $\vec{0}$

$\vec{AB}+\vec{AD} = \vec{AB}+\vec{BC}$

$\vec{CB}+\vec{CD} = -\vec{BC}-\vec{AB}$

∴ $\vec{AB}+\vec{AD}+\vec{CB}+\vec{CD} = 0$.



9) $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஐ அடுத்தடுத்த பக்கங்களாகக் கொண்ட இணைகரம் ABCD யின் ஒரு மூலைவிட்டம் $\vec{a}+\vec{b}$ எனில் மற்றொரு மூலைவிட்டம் கிடைப்பது 1) $\vec{a}-\vec{b}$ 2) $\vec{b}-\vec{a}$ 3) $\vec{a}+\vec{b}$ 4) $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

6) ஒரு வெக்டர் ஆய அச்சுகளின் சம கோணத்தை ஏற்படுத்தினால் அக்கோணம் 1) $\cos^{-1}(1/3)$ 2) $\cos^{-1}(2/3)$ 3) $\cos^{-1}(1/\sqrt{3})$ 4) $\cos^{-1}(2/\sqrt{3})$

$\alpha = \beta = \gamma$. $\therefore \cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$3\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{3}$

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\alpha = \cos^{-1}(1/\sqrt{3})$

7) $\bar{a}-\bar{b}, \bar{b}-\bar{c}, \bar{c}-\bar{a}$ ஆகிய வெக்டர்கள்
1) ஒன்றுக்கொன்று இணையானது 2) அலகு வெக்டர்கள்
3) செங்குத்தான வெக்டர்கள் 4) ஒருதள வெக்டர்கள்.

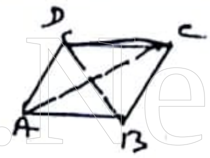
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(1) - 1(1) = 0$$
$\therefore$ ஒருதள வெக்டர்கள்.

8) ABCD ஒர் இணைகரம் எனில் $\overline{AB}+\overline{AD}+\overline{CB}+\overline{CD}$ என்பது
1) $2(\overline{AB}+\overline{AD})$ 2) $4\overline{AC}$ 3) $4\overline{BD}$ 4) $\bar{0}$

$\overline{AB}+\overline{AD} = \overline{AB}+\overline{BC}$

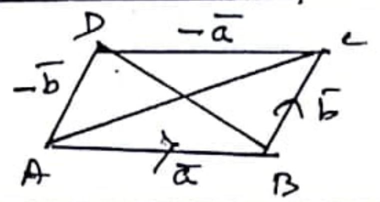
$\overline{CB}+\overline{CD} = -\overline{BC}-\overline{AB}$

$\therefore \overline{AB}+\overline{AD}+\overline{CB}+\overline{CD} = 0.$



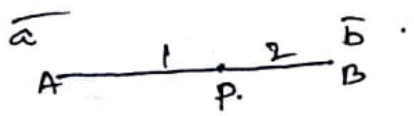
9) $\bar{a}$ மற்றும் $\bar{b}$ யை அடுத்தடுத்த பக்கங்களாக கொண்ட இணைகரம் ABCD யின் ஒரு மூலைவிட்டம் $\bar{a}+\bar{b}$ எனில் மற்றொரு மூலைவிட்டம் $\overline{BD}$ ஆனது 1) $\bar{a}-\bar{b}$ 2) $\bar{b}-\bar{a}$ 3) $\bar{a}+\bar{b}$ 4) $\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}$

$\overline{BD} = \overline{BC}+\overline{CD}$
$= \bar{b}-\bar{a}$



10) A, B ன் நிலை $\bar{a}, \bar{b}$ எனில் கீழ்காணும் நிலை வெக்டர்களில் எந்த நிலை வெக்டரின் புள்ளி AB என்ற கோட்டின் மீது அமையும்.
1) $\bar{a}+\bar{b}$ 2) $\frac{2\bar{a}-\bar{b}}{2}$ 3) $\frac{2\bar{a}+\bar{b}}{3}$ 4) $\frac{\bar{a}-\bar{b}}{3}$

$\overline{OP} = \frac{2\bar{a}+\bar{b}}{2+1} = \frac{2\bar{a}+\bar{b}}{3}$



11) $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ ஆகியவை ஒரே நேர் கோட்டில் அமைந்த மூன்று புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்கள் எனில் கீழ் கண்டவற்றுள் எது சரியானது
1) $\bar{a}=\bar{b}+\bar{c}$ 2) $2\bar{a}=\bar{b}+\bar{c}$ 3) $\bar{b}=\bar{c}+\bar{a}$ 4) $4\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=0$.

12) P என்ற புள்ளியின் நிலை வெக்டர் $\bar{r} = \frac{9\bar{a}+7\bar{b}}{16}$ எனக். P ஆனது $\bar{a}$ மற்றும் $\bar{b}$ யை நிலை வெக்டர்களாகக் கொண்ட புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டை பிரிக்கும் விகிதம்

1) 7 : 9 உட்புறமாக 2) 9 : 7 உட்புறமாக.

3) 9 : 7 வெளிப்புறமாக 4) 7 : 9 வெளிப்புறமாக

$$\frac{9\bar{a}+7\bar{b}}{9+7} = \frac{9\bar{a}+7\bar{b}}{16}.$$

$\bar{a}$ A —— 7 —— • —— 9 —— B $\bar{b}$

13) $\lambda\hat{i}+2\lambda\hat{j}+2\lambda\hat{k}$ என்பது ஓர் அலகு வெக்டர் எனில் λ ன் மதிப்பு.

1) $1/3$ 2) $1/4$ 3) $1/9$ 4) $1/2$.

$$\sqrt{\lambda^2+4\lambda^2+4\lambda^2} = 1.$$
$$9\lambda^2 = 1$$
$$\lambda^2 = 1/9 \quad \lambda = 1/3$$

14) ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு முனைப்புள்ளிகள் நி.வெ. $3\hat{i}+4\hat{j}-4\hat{k}$, $2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$. மையக் கோட்டு சந்தியின் நி.வெ. $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ மூன்றாவது புள்ளியின் நி.வெ.

1) $-2\hat{i}-\hat{j}+9\hat{k}$ 2) $-2\hat{i}-\hat{j}-6\hat{k}$ 3) $2\hat{i}-\hat{j}+6\hat{k}$ 4) $-2\hat{i}+\hat{j}+6\hat{k}$.

$$\frac{\bar{OA}+\bar{OB}+\bar{OC}}{3} = \bar{OG} \qquad \bar{OA}+\bar{OB}+\bar{OC} = 3\bar{OG}$$
$$\bar{OC} = 3\bar{OG} - (\bar{OA}+\bar{OB})$$
$$\bar{OC} = (3\hat{i}+6\hat{j}+9\hat{k}) - (5\hat{i}+7\hat{j})$$
$$= -2\hat{i}-\hat{j}+9\hat{k}.$$

15) $|\bar{a}+\bar{b}| = 60$ $|\bar{a}-\bar{b}| = 40$ $|\bar{b}| = 46$. $|\bar{a}|$ ன் மதிப்பு

1) 42 2) 12 3) 22 4) 32

$$|\bar{a}+\bar{b}|^2 + |\bar{a}-\bar{b}|^2 = 2[|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2]$$
$$3600 + 1600 = 2[|\bar{a}|^2+2116]$$
$$\frac{\cancel{5200}}{\cancel{2}}\ 2600 = |\bar{a}|^2+2116$$
$$|\bar{a}|^2 = 2600-2116$$
$$484$$
$$|\bar{a}| = 22$$

46×46
276
184
2116

16) $\bar{a}, \bar{b}$ ஆகிய சமமான வெக்டர்கள். இவற்றுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் 60° என்றும் அவற்றின் திசையிலிப் பெருக்கல் $1/2$ எனில் $|\bar{a}|$ ன் மதிப்பு

1) 2 2) 3 3) 7 4) 1.

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$|\bar{a}||a|\cdot\frac{1}{\cancel{2}} = \frac{1}{\cancel{2}}$$

$$|\bar{a}|^2 = 1 \quad |\bar{a}| = 1.$$

17) $\bar{a} = (\sin\theta)\hat{i} + (\cos\theta)\hat{j}$ மற்றும் $\bar{b} = \hat{i} - \sqrt{3}\hat{j} + 2\hat{k}$ ஆகிய -வை செங்குத்தாக அமைந்தால் $\theta \in [0, \pi/2]$ எனில் θ ன் மதிப்பு

1) $\pi/3$ 2) $\pi/6$ 3) $\pi/4$ 4) $\pi/2$

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = \sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta = 0$$

$$\sin\theta = \sqrt{3}\cos\theta$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \sqrt{3} \quad \tan\theta = \sqrt{3}.$$

$$\theta = \pi/3.$$

18) $|\bar{a}| = 13$ $|\bar{b}| = 5$, $\bar{a}\cdot\bar{b} = 60$ எனில் $|\bar{a}\times\bar{b}|$ ன் மதிப்பு.

1) 15 2) 35 3) 45 4) 25.

$$|\bar{a}\times\bar{b}|^2 + (\bar{a}\cdot\bar{b})^2 = |\bar{a}|^2|\bar{b}|^2.$$

$$= 169\times 25$$

$$|\bar{a}\times\bar{b}|^2 = 4225 - 3600$$

$$= 625$$

$$|\bar{a}\times\bar{b}| = 25$$

19) $\bar{a}, \bar{b}$ இடைப்பட்ட கோணம் 120°, $|\bar{a}| = 1$, $|b| = 2$ எனில் $[(\bar{a}\times 3\bar{b})\times(3\bar{a} - b)]^2$ ன் மதிப்பு

1) 225 2) 275 3) 325 4) 300.

$$(\bar{a}+3\bar{b})\times(3\bar{a}-\bar{b}) = 3\cancel{\bar{a}\times\bar{a}} - \bar{a}\times\bar{b} + 9\bar{b}\times\bar{a} - 3\cancel{\bar{b}\times\bar{b}}$$

$$= -\bar{a}\times\bar{b} - 9\bar{a}\times\bar{b}$$

$$= -10\,\bar{a}\times\bar{b}$$

$$= -10\cdot|\bar{a}||\bar{b}|\sin 120^\circ$$

$$= -10\cdot 1\cdot 2\cdot \sin 60^\circ$$

$\sin 120^\circ = \sin(180-60)$

$= \sin 60^\circ$

$$= -10\times\cancel{2}\times\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}$$

$$[(\bar{a}+3\bar{b})\times(3\bar{a}-\bar{b})]^2 = 100\times 3 = 300$$

20). $\bar{a}$ மற்றும் $\bar{b}$ ஆகியவற்றின் வெக்டர்களாக ஒ... இடைப்பட்ட கோணம் $60°$ எனில் $\bar{a}$, $\bar{a}+\bar{b}$ க்கு இடைப்பட்ட கோணம்

1) 30 2) $60°$ 3) $45'$ 4) $90°$.

$|\bar{a}\times(\bar{a}+\bar{b})| = |\bar{a}\times\bar{a}+\bar{a}\times\bar{b}| = |\bar{a}\times\bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\theta$

$|\bar{a}\times(\bar{a}\times\bar{b})| = |a||\bar{a}\times\bar{b}|\sin\theta = 2\times2\times\frac{\sqrt3}{2}$

$2\sqrt3 = 2\cdot2\cdot\sqrt3\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2}\quad \theta = \pi/6$.

21) $\hat{i}+3\hat{j}+\lambda\bar{k}$ ன் மீது $5\bar{i}-\hat{j}-3\bar{k}$ ன் வீழலும் $5\hat{i}-\hat{j}-3\bar{k}$ ன் மீது $\hat{i}+3\hat{j}+\lambda\bar{k}$ ன் வீழலும் சமம் எனில் λ ன் மதிப்பு

1) ±4 2) ±3 3) ±5 4) ±1.

$$\frac{(\hat{i}+3\hat{j}+\lambda k)\cdot(5\hat{i}-\hat{j}-3\bar{k})}{|\hat{i}+3\hat{j}+\lambda k|} = \frac{(5\hat{i}-\hat{j}-3\bar{k})\cdot(\hat{i}+3\hat{j}+\lambda\bar{k})}{|5\hat{i}-\hat{j}-3k|}$$

$$\frac{5-3-3\lambda}{\sqrt{1+9+\lambda^2}} = \frac{5-3-3\lambda}{\sqrt{25+1+9}} \Rightarrow 10+\lambda^2 = 35$$

$\lambda^2 = 25\quad \lambda = \pm5$

22) $\hat{i}+5\hat{j}-7\bar{k}$ என்ற வெக்டரின் ஆரம்ப மற்றும் இறுதிப்புள்ளிகள் $(1,2,4)$ மற்றும் $(2,-3\lambda,-3)$ எனில் λ ன் மதிப்பு.

1) $7/3$ 2) $-7/3$ 3) $-5/3$ 4) $5/3$.

$\bar{OA} = \hat{i}+2\hat{j}+4\bar{k}\qquad \bar{AB} = \bar{OB}-\bar{OA}$

$\bar{OB} = 2\hat{i}-3\lambda\hat{j}-3\bar{k}\qquad \hat{i}+5\hat{j}-7\bar{k} = \hat{i}+(-3\lambda-2)\hat{j}-7k$

$\Rightarrow -3\lambda-2 = 5$

$-3\lambda = 7$

$\lambda = -7/3$

23) $10\hat{i}+3\hat{j}$, $12\hat{i}-5\hat{j}$ மற்றும் $a\bar{i}+11\hat{j}$ ஆகிய நிலை வெக்டர்களின் புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் அமைந்தால் a ன் மதிப்பு

1) 6 2) 3 3) 5 4) 8.

$\bar{OA} = 10\hat{i}+3\hat{j}\qquad \bar{AB} = \bar{OB}-\bar{OA} = 2\hat{i}-8\hat{j}$

$\bar{OB} = 12\hat{i}-5\hat{j}\qquad \bar{AC} = (a-10)\hat{i}+8\hat{j}\qquad \frac{2}{a-10} = \frac{-1}{1}$

$\bar{OC} = a\hat{i}+11\hat{j}$

$2 = -a+10$

$a = 10-2 = 8$

24) $\bar{a} = \hat{i}+\hat{j}+\bar{k}\quad \bar{b} = 2\bar{i}+x\hat{j}+\bar{k}\quad \bar{c} = \hat{i}-\hat{j}+4\bar{k}$ மற்றும் $\bar{a}\cdot(\bar{b}\times c) = 70$ எனில் x ன் மதிப்பு

1) 5 2) 7 3) 26 4) 10.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 70 \Rightarrow 1(4x+1) - 1(8-1) + 1(-2-x) = 70$$

$$4x + 1 - 7 - 2 - x = 70$$

$$3x = 78$$

$$x = 26.$$

25) $\bar{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$, $|\bar{b}| = 5$ மேலும் $\bar{a}$ மற்றும் $\bar{b}$க்கு இடைப்பட்ட கோணம் $\pi/6$ எனில் இவ்விரு வெக்டர்களை அடுத்தடுத்த பக்கங்களாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு.

1) $7/4$ 2) $15/4$ 3) $3/4$ 4) $17/4$

$|\bar{a}| = \sqrt{1+4+4} = 3$, $|\bar{b}| = 5$ $\theta = \pi/6$.

$$\frac{1}{2}|\bar{a} \times \bar{b}| = \frac{1}{2}|\bar{a}||\bar{b}| \sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 15/4$$

T. G. Venkatesan
9444409677